1 Évolution des mathématiques au XX^e siècle et après

Hourya Benis-Sinaceur[1] et Mirna Džamonja[2]

Ce chapitre a deux sections qui ont été devéloppées par les deux auteurs respectivement, Mme Benis-Sinaceur a écrit §1. et Mme Džamonja a écrit §2.

1. Aux origines du structuralisme mathématique

L'idée que les mathématiques ne sont ni la science de la quantité, ni la science des figures, ni la science de la mesure, mais celle des structures s'impose au début du XX^e siècle, couronnant une pratique qui s'est de plus en plus focalisée durant le XIX^e siècle sur les relations entre objets d'un domaine plutôt que sur les objets eux-mêmes.

1. 1 Les prémisses : congruence et relation d'équivalence (1801)

L'utilisation implicite de la notion de structure apparaît dans Gauss [1801], où Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (cf. Dieudonné [2 juin 1961]), au lieu de raisonner directement sur les nombres entiers, étudie les relations pouvant unir deux entiers comme la relation de congruence. Deux

1. Nous remercions vivement Bertrand Rémy, professeur et président du département de mathématiques de l'École Polytechnique, d'avoir bien voulu relire le texte, d'avoir signalé quelques coquilles et suggéré des améliorations.

2. Merci à Jean-Marc Vanden-Broeck, professeur au département de mathématiques de l'University College London, pour ses commentaires stylistiques ainsi que mathématiques, et à Catherine Schuhl, ancienne professeure des écoles, qui est notre précieuse collaboratrice en matière de langue.

nombres entiers a et b sont congrus modulo un entier p et on écrit

$$a \equiv b \,(\text{mod}\, p),$$

si et seulement si la différence $a - b$ est divisible par p, c'est-à-dire si $a = b + kp$ où k est un entier. La congruence sur les entiers est une relation d'équivalence[3]. Une autre relation d'équivalence importante est celle qui porte sur les formes quadratiques binaires ; on peut notamment définir une loi de composition sur certaines classes d'équivalence de formes pour obtenir ce qui, en langage moderne, est un groupe abélien fini dont les éléments sont des classes de formes quadratiques. Selon une remarque de Dedekind, le terme de classe est utilisé pour la première fois par Gauss au sens de classe d'équivalence.

Gauss [1801] réorganise l'ensemble des résultats antérieurs de la théorie des nombres sous un angle plus général et plus abstrait soutenu par des notations et un langage nouveau. Aussi Gauss [1801] fut-il une bible pour de nombreux mathématiciens et inspira par ses méthodes aussi bien la théorie de Galois, que la théorie des formes quadratiques, la théorie algébrique des nombres de Dirichlet, Kummer, Dedekind et Kronecker ou la théorie des surfaces de Riemann. D'autres travaux, indépendants de Gauss, ont également concouru à l'affirmation du point de vue structural ; ainsi Hermann Günther Grassmann (1809-1877) dans Grassmann [1862] inaugure la structure d'espace vectoriel, qui n'éveille l'intérêt que tardivement, vers 1870, grâce à Alfred Clebsch (1833-1872) et Felix Klein (1849-1925). Giuseppe Peano (1858-1932) donne de l'algèbre de Grassmann, en (Peano [1888]), une définition formelle qui reste elle aussi assez longtemps méconnue et cela jusque dans les années 1920. La reconnaissance vint avec notamment Hermann Weyl (1885-1955), qui contribua à rendre familière cette structure dans son livre Weyl [1918b].

Les exemples précédents montrent que ce sont d'abord les structures algébriques qui sont venues au jour. La première d'entre elles fut la structure de groupe. C'est de cette structure, fondamentale entre toutes, que nous allons décrire schématiquement la genèse, à titre paradigmatique. Un groupe est un ensemble E muni d'une loi de composition interne associative admettant un élément neutre et un élément inverse pour chaque élément de l'ensemble E. Si la loi est aussi commutative on parle de groupe commutatif ou abélien. Par exemple l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Z}$, forme un groupe

3. C'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive.

(abélien, infini) pour l'addition ; l'ensemble des entiers modulo $p\,(p \neq 0)$ est un groupe (cyclique, fini) pour l'addition ; l'ensemble des permutations d'un ensemble E, c'est-à-dire des bijections de E sur lui-même, est un groupe, appelé groupe symétrique et noté $S(E)$, pour la loi $f \circ g\ : E \to\ E, x \mapsto f(g(x))$; l'ensemble des rotations dans le plan ou dans l'espace euclidien forme un groupe appelé « groupe spécial orthogonal ». La définition formelle d'un groupe n'apparaîtra que dans la deuxième moitié du XIXe siècle : esquissée en par Arthur Cayley (1821-1895) Cayley [1854] dans le cas des groupes finis et dans la perspective de l'algèbre symbolique anglaise[4], elle est donnée par Walther von Dyck en 1881 (cf. Dyck [1882], p. 1-44) puis par Heinrich Weber (Weber [1893], p. 521-549).

1. 2 La structure de groupe : les débuts avec L.A. Cauchy et E. Galois

Au début la structure de groupe se présente de manière incarnée, sous forme de groupes de substitution et de groupes de symétrie dégagés dans la résolution des équations algébriques, à laquelle ont contribué Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), Carl Friedrich Gauss, Paolo Ruffini (1765-1822), Niels Henrik Abel (1802-1829), Augustin Louis Cauchy (1789-1851) et, bien sûr, Évariste Galois (1811-1831).

Cauchy est l'instituteur du calcul des substitutions. Il publie en 1815 deux mémoires dans lesquels il étudie le nombre de valeurs qu'une fonction de n variables peut prendre lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles ces variables. Plus tard, vers 1844, Cauchy publie un mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données et sur les permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre, qui constitue un nouvel objet mathématique : les groupes de substitutions, et établit un nouveau symbolisme pour les noter. Entre temps les mémoires de 1815 sont lus par Niels Henrik Abel et par Évariste Galois.

Ce dernier s'attaque au problème de la résolubilité par radicaux de toutes les équations algébriques et non plus seulement au seul cas, traité par Abel, de l'équation générale du 5e degré. Dans Galois [1962] (in Arza

4. En se référant à Galois, Cayley définit un groupe comme un ensemble de symboles régis par une loi de composition interne ayant un élément neutre et décrit la structure des groupes finis par leurs tables de multiplication.

and Bourgne [1962]), Galois anticipe informellement le concept de corps de nombres algébriques, c'est-à-dire de nombres qui sont solutions d'une équation algébrique à coefficients rationnels, et introduit le concept de « groupe de l'équation », appelé aujourd'hui « groupe de Galois », qui est le groupe formé par les permutations des racines qui laissent invariantes toutes les relations entre ces racines. Il apparaît clairement que la résolubilité d'une équation est relative au domaine de nombres que l'on considère : nombres rationnels, nombres réels ou nombres complexes. Aujourd'hui ce groupe de Galois est défini comme le groupe des automorphismes du corps K des racines laissant fixes les éléments du corps $\mathbb{Q}$ des coefficients.[7] Les idées de Galois furent méconnues par ses contemporains et publiées seulement à titre posthume par Joseph Liouville (Liouville [1846]). Dès lors l'intérêt pour la théorie de Galois ne cessera de croître. Joseph Alfred Serret (1810-1885) dans Serret [1849], issu de son cours à la Faculté des Sciences de Paris et qui connut sept éditions en 1849, 1854, 1866 et 1877-1879, 1885, 1910 et 1928, expose la théorie de Galois dans le langage de la théorie des substitutions sans s'appuyer sur la notion de groupe de permutations.[8] Poursuivant l'impulsion donnée par Abel et Galois, Leopold Kronecker (1823-1891) publie en Kronecker [1853] – peu après un séjour à Paris – un mémoire sur les équations résolubles par radicaux[9], un mémoire Kronecker [1854], en 1856 un mémoire portant le même titre que celui de 1853, en 1858 une étude de l'équation du 5e degré et une autre sur les équations du septième degré. Kronecker [1853] observe qu'il faut d'abord transformer complètement la manière de formuler la question du critère de résolubilité des équations et raisonne sur les extensions abéliennes finies du corps des rationnels mais sans expliciter pour elles-mêmes les notions de corps et d'extension de corps.

Dans les mêmes années 1856-1858, tandis qu'il enseigne comme Privat-

7. Pour plus de détails voir le résumé synthétique en Dahan-Dalmedico and Peiffer [1982], p. 252-259 et Ehrhardt [2011]. Sur la postérité de la théorie de Galois cf. van der Waerden [1955], van der Waerden [1972], van der Waerden [1975] et Edwards [1984].

8. Cf. le chapitre V du tome second de la quatrième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1877. Serret écrit page 639 : « Galois emploie la considération des groupes de permutations dont nous avons parlé aux n°s 442 et 443, mais il nous a paru préférable de nous en tenir aux substitutions. Au reste ce n'est là qu'un simple changement dans la forme des énoncés des théorèmes... ».

9. L'article, communiqué par P. Lejeune-Dirichlet à la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Académie de Berlin, fut aussitôt traduit et inséré dans le premier volume du Serret [1849] (2e édition, 1854, Note XIII, 560-569. En ligne : https ://catalog.hathitrust.org/Record/011602874). Richard Dedekind eut cette édition entre les mains et s'appuie sur elle pour sa propre présentation de la théorie de Galois. Pour une présentation de l'œuvre de Kronecker avec une bibliographie chronologique cf. Weber [1891-1892].

dozent (chargé de cours) à Göttingen, Richard Dedekind (1831-1916) fait des cours sur la théorie des groupes et expose pour la première fois dans une université allemande la théorie de Galois. Le cours intitulé « Eine Vorlesung über Algebra » est publié à l'occasion du 150e anniversaire de la naissance de Dedekind par Winfried Scharlau en Scharlau [1981][10] ; il révèle l'orientation structurale précoce du jeune enseignant. S'il commence par exposer les éléments de la théorie des substitutions, Dedekind se fonde ensuite sur le concept auquel il donne le nom de corps – Körper – et qu'il définira comme un ensemble stable pour les quatre opérations rationnelles dans Dedekind [1888]. C'est donc très tôt que Dedekind pense et met en œuvre ce qu'il écrira dans la première préface de son opuscule sur les nombres : « les progrès les plus grands et les plus féconds en mathématiques et dans d'autres sciences sont dus avant tout à la création et à l'introduction de nouveaux concepts, qui sont rendues nécessaires par le fréquent retour de phénomènes complexes difficilement maîtrisables par les anciens concepts ». Cet *a priori* théorique enfantera bien d'autres concepts qui ont imprimé à la mathématique du début du XXe siècle sa facture « conceptuelle », première manière de désigner la mathématique des structures. Aujourd'hui nous parlons toujours le langage de Dedekind mais nous définissons un corps K comme un ensemble muni de deux lois de composition internes, une addition qui fait de K un groupe commutatif avec 0 pour élément neutre et une multiplication qui fait de $K \setminus \{0\}$ un groupe avec 1 pour élément neutre et qui est distributive par rapport à l'addition. Lorsque la multiplication est commutative on parle de corps commutatif. L'ensemble des nombres rationnels est un corps commutatif, de même l'ensemble des nombres réels, l'ensemble des nombres complexes, ou l'ensemble des classes de congruence d'entiers modulo un entier premier p.

Dedekind présente la théorie de Galois comme théorie des extensions de corps et de leurs automorphismes, plutôt que comme théorie des substitutions et des fonctions invariantes par substitution comme c'était le cas chez Galois. Cette présentation deviendra la version « classique » de la théorie, celle que Heinrich Weber (1842-1913), s'inspirant des leçons de Dedekind et aiguillé par ailleurs par les contributions de Felix Klein que nous évoquons plus bas, exposera dans son article Weber [1893][13] et au chapitre 13 du premier volume de son traité Weber [1895-1896]. Conçu pour intro-

10. Sur ce cours, outre la présentation et les commentaires de W. Scharlau, on pourra consulter Landau [1917] et W. [1977].

13. Weber fut professeur à Göttingen de 1892 à 1895, période durant laquelle il publia Weber [1893] et Weber [1895-1896].

duire à « l'algèbre moderne », ce traité servit de manuel de référence à toute une génération jusqu'à la publication de van der Waerden [1930-1931], qui sera le manuel de la mathématique des structures et restera une référence universelle jusque dans les années 1970. En suite, Emil Artin (1898-1962) publie Artin [1942], dont l'exposé simplifie la théorie classique et en facilite les généralisations[14] par une formalisation qui utilise les structures algébriques fondamentales : groupes, anneaux, corps et espaces vectoriels, et procède à l'inverse de Dedekind : au lieu de « monter » d'un corps à ses extensions, Artin « descend » d'un sur-corps à ses sous-corps. La présentation canonique actuelle de la théorie de Galois est fondée sur la formalisation d'Artin.

1. 3 Göttingen : la mathématique conceptuelle

La considération des congruences sur les nombres entiers introduites par Gauss et la notion associée de classe d'équivalence jouèrent un rôle décisif dans la formation et la généralisation du point de vue structural ainsi que dans l'alliance de ce point de vue avec le privilège accordé aux méthodes arithmétiques[15]. Le point de vue structural s'est affirmé tout particulièrement à l'université de Göttingen qui profita de la présence et du rayonnement immense du « prince des mathématiciens », Gauss, nommé en 1807 professeur d'astronomie et directeur de l'observatoire de Göttingen. Proche collaborateur de Gauss, le physicien Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) œuvra à l'installation en 1855 de Peter Lejeune-Dirichlet (1805-1859) à Göttingen. Celui-ci exerça une influence déterminante sur ses élèves parmi lesquels on compte Rudolf Lipschitz (1831-1903), Bernhard Riemann (1826-1866) et Richard Dedekind, à qui revint la charge d'éditer ses “Leçons sur la théorie des nombres" (Lejeune-Dirichlet [1863], quatre éditions de 1863 à 1894 munis des fameux “Suppléments” ajoutés par Dedekind). Lorsqu'il était encore à Berlin, Dirichlet joua également un rôle dans l'orientation de Leopold Kronecker, qui sera l'éditeur de ses Œuvres complètes en deux volumes (Lejeune-Dirichlet [1889] et Lejeune-Dirichlet [1897]). Mentionnons encore que les cours que Heinrich Weber professa à l'Université de Königsberg, tandis que David Hilbert (1862-1943) et Hermann Minkowski (1864-1909) y étaient étudiants, reposait extensivement sur Gauss [1801]

14. Cf. Chevalley [1964], p. 2
15. Cf. par exemple Ferreirós [2007].

et les travaux de Dirichlet (cf. Roquette [1992]).

Ayant soutenu sous la direction de Gauss sa thèse sur la Théorie des fonctions d'une variable complexe (cf. Riemann [1876 ; 2e éd. 1892])[18] où est introduit le concept de « surface de Riemann », Bernhard Riemann succéda à Lejeune-Dirichlet. Dedekind suivit les cours de Riemann sur la théorie des fonctions abéliennes et elliptiques et en fut profondément impressionné ; il sera appelé à éditer, en collaboration avec Heinrich Weber, les œuvres de Riemann après la mort de ce dernier. La conjonction de ces mathématiciens de génie ou de talent et leurs interactions ouvrit « une ère nouvelle » pour Göttingen (cf. Dugac [1976], p. 21), qui acquit un prestige égal et bientôt supérieur à celui de Berlin ou de Paris. Pour Dedekind tout particulièrement, Dirichlet représente l'exemple à suivre. Introduit par lui aux œuvres d'Einsenstein (1823-1852), de Kummer (1810-1893) et de Kronecker sur la théorie des nombres, c'est à lui certainement qu'il doit son intérêt et sa préférence marqués pour les méthodes arithmétiques. Dedekind reconnaît en effet que Dirichlet a fait de lui, « tant par son enseignement que par de nombreux entretiens personnels, [. . .], un homme nouveau »(cf. Dugac [1976], p. 21). Il a notamment adopté la posture qui consiste, suivant la fameuse formule de Dirichlet de 1852, à « substituer la pensée au calcul » (cf. Lejeune-Dirichlet [1897], p. 245[19], et ne manque pas de souligner à diverses reprises « la puissance » des concepts sur lesquels on doit fonder une théorie de manière à être ainsi en état non pas de « tirer les démonstrations du calcul », mais au contraire de « prédire les résultats du calcul » à partir des propriétés des concepts fondamentaux (Dedekind [1930-1932] III, p. 296. Voir aussi, Dedekind [1854] ; Dedekind [1888], 1ère préface ; Lettre à Lipschitz du 10 juin 1876, in Dedekind [1930-1932], III, 468-474, trad. fr in Dedekind [2008], p. 258-270)[20]. Justement pour lui, le mérite de Riemann est d'avoir édifié la théorie des fonctions sur la base de concepts fondamentaux caractéristiques qui permettent de mettre en lumière les propriétés intrinsèques des fonctions considérées. Et il s'attachera à en élaborer, avec la collaboration de Heinrich Weber, une version fondée sur des concepts

18. Sur Riemann on pourra consulter Dedekind [1876] p. 509-526 et Laugwitz [1999].

19. La formule de Dirichlet est plus nuancée qu'il n'est accoutumé de le dire : « Si la tendance de plus en plus prépondérante de la nouvelle Analyse est de substituer la pensée au calcul, il n'en reste pas moins que dans certains domaines le calcul garde ses droits ».

20. À l'occasion du centenaire de Dirichlet, en 1905 à Göttingen, Hermann Minkowski mentionne un certain nombre de mathématiciens ayant été significativement influencés par le style de Dirichlet et juge que « la période moderne de l'histoire des mathématiques » a son origine dans ce qu'il appelle « l'autre principe de Dirichlet : vaincre les problèmes avec un minimum de calcul aveugle, un maximum de pensées » Minkowski [1905], p. 163.

arithmétiques élémentaires, principalement celui de divisibilité (Dedekind and Weber [1882]).

Dedekind soutient que la création de concepts nouveaux est le moteur de la dynamique des mathématiques, et ne cesse d'illustrer cette fécondité dans ses travaux. Il introduit en effet nombre de concepts nouveaux : le concept de système, ancêtre de notre concept d'ensemble, les concepts de corps, de corps de nombres, de nombre réel (Descartes parlait de « racine réelle » et la plupart des auteurs, même de son époque, conservaient le vocable de « grandeurs irrationnelles »), d'idéal, de chaîne, de coupure, de treillis (sous le nom de « groupe dual »), de module, d'anneau[21](sous le nom d' « ordre » - *Ordnung*). Hilbert écrira dans une lettre à Minkowski : « dans notre science c'est toujours et seulement l'esprit réfléchissant [*der überlegende Geist*], non la force appliquée des formules qui est la condition d'un résultat réussi ».[22] Plus tard il précisera que les concepts [*Begriffe*] apportent la « liberté », parce qu'ils permettent de constituer la théorie déductive d'un domaine et de prendre ainsi du recul par rapports aux faits dudit domaine, c'est-à-dire, concrètement, de distinguer les propriétés transférables ou généralisables à d'autres domaines de celles qui ne le sont pas (Hilbert [1922], p. 161)[23]. Et dans sa préface à Alexandroff and Hopf [1936], Hilbert soulignera la nécessité pour une branche dont le champ d'application embrasse toute l'Analyse de « conduire les constructions de concepts à une précision telle qu'elles puissent laisser voir le noyau commun de questions apparemment différentes ».

Ces concepts désignent en fait ce qu'après Nicolas Bourbaki on a pris l'habitude d'appeler des « structures ». Ils ont ouvert la voie à l'émergence de nouvelles manières de faire des mathématiques et de penser leur nature, qui sont, pour une part, encore les nôtres aujourd'hui. C'est l'émergence d'un *style mathématique [Denkstil]*, qui s'est affirmé à travers des œuvres relevant de diverses disciplines mathématiques et durant une longue période couronnée par les années 1920-1933. Dedekind est le grand promoteur de ce style qui fleurit à Göttingen dans l'École de Hilbert et d'Emmy Nœther (1882-1935), et modifie de manière durable la pratique des mathématiciens du monde entier. Dedekind fut notamment l'un des premiers ar-

21. La définition axiomatique d'anneau est due à A. A. Fraenkel (1891-1965) (Fraenkel [1915])
22. Cité par Otto Blumenthal dans son exposé de la carrière intellectuelle de Hilbert, in Hilbert [1932-1935] III, p. 394.
23. « La méthode axiomatique donne à la recherche la plus complète liberté de mouvement [. . .] et permet d'obtenir une parfaite clarté sur les principes de déduction en mathématiques ». Pour un panorama de l'œuvre de Hilbert cf. Benis-Sinaceur and Bourguignon [1993].

tisans de « l'algèbre moderne », dont l'extraordinaire essor dans le premier tiers du XXe siècle fit la célébrité de l'école de Göttingen et attira des mathématiciens du monde entier (cf. Hasse [1930])[24] Dedekind tient ainsi un rôle de tout premier plan dans l'institution frontale de la perspective structurale et conceptuelle des mathématiques. Il est l'insigne défenseur de l'usage de l'infini actuel et des méthodes non constructives qui rencontrent l'opposition de Kronecker, de Poincaré (1854-1912) et des intuitionnistes. Soutenue intellectuellement et institutionnellement par Felix Klein et David Hilbert, la perspective structurale sera suivie et renforcée par les œuvres de Heinrich Weber, David Hilbert, Emmy Nœther, Emil Artin, B. L. van der Waerden (1903-1996) et de leurs élèves ou disciples. Dans le premier tiers du XXe siècle il n'était pas de mathématicien qui n'ambitionnât de venir à Göttingen assister à l'éclosion des structures mathématiques entre les mains de leurs créateurs[25]. Mais revenons à l'application de la perspective structurale à la notion de groupe.

1. 4 Dedekind : définition du concept de groupe abstrait (1855-1858)

Dans le cours sur la théorie de Galois, Dedekind définit un groupe d'une manière semblable à celle de Cayley (dont il connaissait probablement le travail), comme un ensemble d'éléments soumis à une loi de composition interne ("Eine Vorlesung über Algebra", in Scharlau [1981]). Mais bien qu'il parte de considérations sur les substitutions, son angle d'attaque est beaucoup plus général que celui de Galois et que la perspective symbolique de Cayley. Il précise en effet que ses résultats sont « valables pour n'importe quel ensemble fini d'éléments, choses, ou concepts (satisfaisant la définition et les deux théorèmes établis antérieurement). Dans de nombreuses parties des mathématiques, ajoute-t-il, et en particulier en théorie des nombres et en algèbre, on trouve continuellement des exemples de cette théorie et les mêmes méthodes de preuve y sont valables ». Et dans le fait, il traite des groupes en tant qu'objets directs d'étude sans passer par l'énumération ou la considération de la nature de leurs éléments. Les opérations portent sur les groupes et non sur leurs éléments. Deux concepts de l'algèbre moderne organisent donc l'exposé de la théorie de Galois par Dedekind, même si la

24. On lira avec profit le chapitre consacré à Dedekind dans Ferreirós [2007].
25. Cf. la liste des mathématiciens en visite à Göttingen établie dans Brewer and Smith [1981]

définition n'en est pas encore celle qui s'imposera uniformément à tous dans tous les domaines des mathématiques : celui de groupe et celui de corps vus sous un angle abstrait, c'est-à-dire indépendamment de la considération de leurs éléments[28]. Si l'on compare l'article précurseur de 1853 de Kronecker et la “Eine Vorlesung über Algebra" de Dedekind (Scharlau [1981]) et on saisit immédiatement sur le cas de la théorie de Galois la différence de style de leurs approches respectives[29] .

Dans les mêmes années 1855-58 Dedekind fait un autre cours qui traite du concept de groupe de manière abstraite. Il considère en effet des groupes d'objets quelconques et définit entre deux groupes M_1 et M_2 une relation qu'il appelle « l'équivalence de groupes » et qui correspond à notre concept d'isomorphisme (Dedekind [1930-1932] III, 439-446). C'est dire que dès cette époque Dedekind focalise son attention sur les relations structurelles entre groupes plutôt que sur la nature particulière des éléments contenus dans l'un ou l'autre. Dedekind exprime l'équivalence de deux groupes en disant qu'ils sont du « même genre » (von derselben Art), puis illustre cette relation par la substitution S qui aux éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de M_1 fait correspondre les éléments $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ de M_2. Aujourd'hui on désignerait par f la substitution (ou la correspondance) et on écrirait $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_n)$, expression de ce que nous appelons un homomorphisme de groupes (ou isomorphisme entre M_1 et $f(M_1)$). Ce mémoire de Dedekind nous montre clairement trois aspects qui se retrouvent conjoints ailleurs dans son œuvre : le lien historique de la notion de groupe avec le calcul des substitutions, son lien également avec le calcul des congruences sur les entiers et l'analogie de la relation d'inclusion entre ensembles avec la relation de divisibilité entre nombres, et enfin la pratique émergente de traiter de groupes d'objets quelconques et de correspondances transportant la structure d'un groupe sur un autre sans considération de la nature particulière des éléments des groupes.

En 1857 Dedekind publie un mémoire sur les congruences portant sur des fonctions rationnelles entières d'une variable réelle à coefficients entiers, c'est-à-dire sur des fonctions polynomiales à coefficients entiers, (Dedekind [1930-1932] I, 40-66), où il commence par reconnaître la paternité sur le sujet de Gauss, de Galois, d'Alfred Serret (dont il renvoie à la deuxième édition de 1854) et de Theodor Schönemann[30]. Soient de telles fonctions f

28. Sur les processus d'abstraction mathématique cf. Benis-Sinaceur [2014].
29. Sur Kronecker cf. Edwards [1988] et Edwards [1995].
30. Theodor Schönemann (1812-1868) était un professeur de lycée qui s'était, sur le conseil de Carl Gustav Jacobi (1804-1851), intéressé à la théorie de Galois et avait comblé quelques

et g, f est congru à g modulo un nombre premier p si et seulement si tous les coefficients de $f - g$ sont divisibles par p. Dedekind souligne évidemment l'analogie avec la congruence sur des nombres entiers et signale que la théorie qu'il va exposer peut être appliquée à l'algèbre sans qu'il soit besoin de recourir à des concepts algébriques. C'est déjà le programme de traiter par des méthodes purement arithmétiques des objets algébriques telles que les fonctions algébriques d'une variable, programme qui sera réalisé en collaboration avec Heinrich Weber[31]. La perspective ensembliste est bien entendu présente car la classe des fonctions congrues modulo p est un ensemble infini ; il s'agit en fait d'une classe d'équivalence de sorte qu'il est possible de représenter la classe par l'un de ses éléments. Dedekind précise que chaque classe d'équivalence « se comporte comme un nombre unique bien déterminé » si bien que l'infinité des classes d'équivalence de fonctions congrues modulo p correspond à la suite infinie des nombres entiers. Il calcule alors sur les classes de fonctions par le biais d'un calcul sur leurs représentants comme on calcule sur des nombres. Les lois de divisibilité des entiers peuvent être appliquées ici. À ce moment les opérations sur les ensembles ne sont pas introduites en tant que telles, elles seront posées trente ans plus tard dans Dedekind [1888]. Mais déjà à ce moment l'alliance est faite entre la considération d'ensemble infinis, la généralisation de propriétés connues sur les nombres entiers à des éléments qui ne sont pas des nombres et le traitement de l'algèbre par des méthodes arithmétiques, ainsi que la conception concomitante d'une arithmétique abstraite (constituée de lois plutôt que d'objets soumis à ces lois), en laquelle il verra plus tard une logique de la pensée (cf. Benis-Sinaceur [2017]).

1. 5 Felix Klein : l'application de la théorie des groupes à la géométrie (1872)

En France, Camille Jordan (1838-1922) publia le premier manuel de théorie des groupes (Jordan [1870]). Ce manuel constitue un chaînon intermédiaire dans la transformation de l'algèbre comme théorie des équations en algèbre comme théorie des structures abstraites. On y trouve une étude approfondie de la théorie de Galois, la première approche systématique de

lacunes dans les démonstrations.

31. Dedekind and Weber [1882] in. Dedekind [1930-1932] I, 238-349. Cette théorie est une reformulation de la théorie des fonctions de Riemann à l'aide de concepts arithmétiques, principalement celui de divisibilité. Cf. Haffner [2017]

la théorie des groupes finis avec l'énoncé du théorème de Jordan-Hölder et l'étude du groupe linéaire associé à un corps de p éléments, p étant un nombre premier. Jordan obtint le prix Poncelet de l'Académie des Sciences pour ce livre, qui lui valut aussi une reconnaissance internationale : Felix Klein et Sophus Lie (1842-1899) vinrent le visiter à Paris, notamment attirés par sa classification de tous les groupes de déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions.

L'application des groupes à la géométrie fut reprise et poursuivie par Felix Klein (1849-1925) dans ses fameuses “Considération comparées de différentes recherches récentes en géométrie" (Klein [1872]), universellement connues sous le nom de “Programme d'Erlangen” (cf. Russo [1968]). L'objectif fondamental est d'unifier les différents variantes de la géométrie : euclidienne, projective, non euclidiennes de János Bolyai (1802-1860) et Nicolaï Lobatchevski (1792-1856), sphérique de Riemann, etc. Le moyen ? La fonder sur la notion de groupe de transformations. Une géométrie est décrite par l'action d'un groupe G sur un ensemble E ; son étude revient à étudier les propriétés des éléments de E qui sont invariants par les transformations de G. Après avoir donné comme exemples le groupe des déplacements euclidiens, qui contient celui des rotations autour d'un point, Klein appelle « groupe principal » le groupe qui laisse inchangées les propriétés des figures de l'espace, c'est-à-dire le groupe des déplacements, des similitudes et des symétries. Le groupe principal est un sous-groupe du groupe projectif et la géométrie apparaît comme la science unifiée d'une hiérarchie de groupes, rendant caduque la conception traditionnelle de la géométrie comme science des figures de l'espace. Klein généralise son propos en adoptant « le point de vue mathématique abstrait », hérité à la fois de Grassmann dont il souligne l'apport, de Dedekind et surtout de l'exposé de la Dissertation de Riemann de 1854 (publiée par Dedekind en Riemann [1868]) où Riemann introduit le concept abstrait d'espace comme « concept de grandeur étendue de dimension multiple [« *Begriff einer mehrfach ausgedehnte Grösse* »], susceptible de différents rapports métriques, l'espace [géométrique habituel] n'étant qu'un cas particulier d'une grandeur étendue de trois dimensions ». Riemann a sonné définitivement le glas pour le dogme, déjà contesté par Gauss et par Bolyai et Lobatchevski, de la structure euclidienne de l'espace. Klein pose explicitement en effet le problème pour des multiplicités quelconques de dimension quelconque : « Étant données une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe », ou sous une forme plus ramassée : « Soit une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe.» Sous l'influence de Sophus Lie, Klein dépasse le point de vue de Cayley pour qui « la géométrie projective est toute la géométrie » et envisage le groupe général des transformations continues.

1. 6 Définition axiomatique de la structure de groupe

Le concept de groupe abstrait[36] est explicitement défini de manière axiomatique tant pour le cas infini que pour le cas fini dans le paragraphe 1 de Weber [1893], que nous avons mentionné plus haut. La définition est très proche de la définition actuelle ; de même pour l'isomorphie de deux groupes. Heinrich Weber précise en introduction que dans sa présentation, la théorie de Galois est un « pur formalisme », indépendant de « la signification numérique des éléments de groupe ». Le paragraphe 2 définit également de manière axiomatique le concept de corps commutatif abstrait, dans les cas d'un nombre infini ou fini d'éléments. La mutation de l'algèbre en théorie des structures algébriques est accomplie. Durant le XX$^{\text{e}}$ siècle les groupes devinrent un instrument de choix, si bien que même un mathématicien peu enclin à embrasser l'infini actuel des cantoriens et les définitions axiomatiques à la Hilbert fera l'éloge de l'analogie qui dévoile les lois de classes de faits ou de problèmes et soulignera l'importance des mots nouveaux qui condensent « l'âme » des faits. Parmi les heureuses et fructueuses innovations de langage Poincaré met en effet au premier rang celles de groupe et d'invariant qui « nous ont fait apercevoir l'essence de bien des raisonnements mathématiques » (Poincaré [1908]). De même Kronecker ne rejette pas tant l'approche axiomatique du concept de groupe qui permet, écrit-il, de dégager les principes fondamentaux, et nous « libère ... de toutes les restrictions inessentielles ... [et nous fait] gagner en clarté et simplicité » (Kronecker [1895-1930], I, p. 275.) que le recours à la théorie des ensembles infinis et l'utilisation de méthodes non constructives. Les groupes gagnèrent une grande reconnaissance avec notamment les travaux de Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) et William Burnside (1852-1927).

36. Pour plus de détails cf. Wussing [1969]

1. 7 E. Steinitz : la théorie des corps abstraits (1910)

L'article Weber [1893] est la première mais non la seule référence de la monographie d'Ernst Steinitz sur la théorie des corps abstraits (Steinitz [1910], cf. Benis-Sinaceur [1991, 2e éd. 1999], p. 200 et sqq.). Le programme de Steinitz n'est plus orienté vers la théorie de Galois, il est d'offrir « un tableau de tous les types possibles de corps et d'établir les traits fondamentaux de leurs relations mutuelles », en laissant provisoirement de côté les applications à la géométrie, à la théorie des nombres et à la théorie des fonctions. En particulier Steinitz démontre que tout corps peut s'obtenir à partir d'un corps premier, c'est-à-dire un corps isomorphe au corps des rationnels ou isomorphe au corps quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier[37], par une extension transcendante suivie d'une extension algébrique quelconque. Steinitz revendique l'usage de méthodes arithmétiques en évoquant notamment la méthode des congruences utilisée par Kronecker pour éviter les irrationnels, mais recourt à l'axiome du choix quand cela est indispensable, par exemple pour démontrer que tout corps possède une extension algébriquement close. Les concepts de corps, de sous-corps, d'extension, de corps quotient, etc. sont définis axiomatiquement. Cette monographie, conjointement avec le "Zahlbericht" de Hilbert (Hilbert [1897], cf. l'introduction de Hilbert [1998]), inépuisable somme de la théorie des nombres algébriques écrite selon le principe de Dirichlet et Riemann de mener les démonstrations par la pensée plutôt que par le calcul[38], marque l'achèvement de l'axiomatisation de l'algèbre classique et le point de départ du développement de l'algèbre abstraite dans l'École de Göttingen. Celle-ci devient le leader mondial avec les travaux menés sous l'impulsion agissante de Felix Klein et David Hilbert par Emmy Nœther, Emil Artin, Otto Schreier (1901-1929), Helmut Hasse (1898-1979) et B.L. van der Waerden qui synthétisera en un traité magistral les travaux de ses collègues (cf. Benis-Sinaceur [1991, 2e éd. 1999], p. 150-159, 191 sqq ; Corry [2004]).

En prenant l'exemple du concept de groupe nous avons schématiquement retracé quelques lignes de la formation progressive de la conception de l'algèbre abstraite. Bien entendu il faudrait consacrer davantage de

37. La relation d'équivalence permettant le quotient est la congruence sur les entiers. Un élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est la classe des éléments ayant le même reste dans la division euclidienne par p.

38. Hilbert écrit dans la préface du Hilbert [1897] : « J'ai tâché d'évider le lourd appareil calculatoire de Kummer et de réaliser le principe de Riemann en tirant les preuves non de calculs, mais de la pensée seule » (Hilbert [1932-1935], I, p. 67.)

place aux opuscules de Dedekind sur les nombres que j'ai étudiés ailleurs (cf. Dedekind [2008]), à la définition des nombres réels qui apporte enfin un fondement à l'analyse réelle, aux travaux de Kummer, Kronecker et Dedekind sur la théorie des idéaux (cf. Edwards [1980/81]), à la théorie des discriminants, à la théorie des ensembles de Dedekind et Cantor que nous évoqons plus bas, aux célèbres *Fondements de la Géométrie* Hilbert [1899] qui fait de l'axiomatique un canon de la pensée mathématique et un incomparable outil de recherche, à son fameux théorème de la base finie (tout idéal des polynômes d'un anneau nœthérien admet un système fini de générateurs[39]), aux avancées parallèles de l'algèbre symbolique anglaise, et à bien d'autres résultats et acquisitions qui ont concouru à l'œuvre d'Emmy Nœther, la mathématicienne dont les travaux « ont changé la face de l'algèbre »[40], d'Emil Artin, Helmut Hasse, B.L. van der Waerden, Heinz Hopf (1894-1971), Saunders Mc Lane (1909-2005), Claude Chevalley (1909-1984), pour ne citer que quelques uns des plus grands artisans de la mathématique des structures. C'est l'avènement de la « *begriffliche Mathematik* » (la mathématique conceptuelle) ainsi que l'a baptisée Pavel Alexandrov (1896-1982) (cf. Brewer and Smith [1981], p. 101 ; van der Waerden [1935]). Nous caractériserons brièvement la *begriffliche Mathematik* à travers l'évocation de l'œuvre exemplaire d'Emmy Nœther.

1. 8 Emmy Nœther

De manière générale, le trait caractéristique de la *begriffliche Mathematik* a consisté à passer de l'étude axiomatique d'une structure S sur un ensemble d'éléments indéterminés (à la Dedekind et Hilbert) à l'étude des homomorphismes H de structures S (à la Emmy Nœther) : homomorphismes de groupes, d'anneaux, de modules, théorie abstraite des idéaux, algèbres[43] non commutatives. Emmy Nœther n'a pas seulement décrit les structures à

---

39. Un anneau est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication distributive par rapport à l'addition. Un anneau est nœthérien si tous ses idéaux sont de type fini, c'est-à-dire admettent une famille finie de générateurs. Plus généralement le théorème de la base de Hilbert dit que si A est un anneau nœthérien, alors l'anneau des polynômes $A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ est nœthérien.

40. L'expression est de Weyl [1935]. On peut consulter Brewer and Smith [1981] et Dick [1981].

43. Une algèbre est un ensemble muni de trois lois. Les deux premières lui confèrent la structure d'espace vectoriel. La troisième loi est une loi de composition interne appelée produit. Cette loi est associative, possède un élément neutre, et est distributive par rapport à l'addition. Enfin, les deux « produits » sont « compatibles ».

un isomorphisme près comme l'ont fait Dedekind, Hilbert et d'autres axiomaticiens ; elle a décrit les structures par des homomorphismes « en partant de la notion d'homomorphisme », ainsi que l'explique van der Waerden (van der Waerden [1930-1931] I, p. 55-57), et elle a formulé ce qu'on a appelait déjà à l'époque des « théorèmes de structures », qui sont en fait des précurseurs des théorèmes sur les « flèches » en théorie des catégories. Emmy Nœther a ainsi amorcé la mutation sémantique du terme de structure que réalise la théorie des catégories (cf. Awodey [1996], traduction française Gandon and Smadja [2017], p. 287-322.).

En introduisant les structures algébriques dans la théorie naissante de la topologie, Emmy Nœther est aussi à l'origine de la topologie algébrique (anciennement dite topologie combinatoire), qui associe des invariants algébriques, plutôt que des invariants arithmétiques comme les nombres de Betti[44], aux structures topologiques. Alexandrov, qui a enseigné à Göttingen de 1826 à 1829, a souligné que bien qu'ennemie déclarée des méthodes algorithmiques Emmy Nœther était tout à fait capable de les maîtriser – j'ai signalé la même conjonction dans l'œuvre d'Emil Artin (Benis-Sinaceur [1991, 2e éd. 1999], p. 191-196). Plus récemment Colin Mc Larty a montré qu'Emmy Nœther a su, en fait, conjuguer la pratique du symbolisme calculatoire d'une part, les « intuitions » géométriques inspirées par l'œuvre de F. Klein d'autre part, avec l'organisation conceptuelle qu'elle a développé à la suite de Dedekind et de Hilbert (cf. McLarty [2006], McLarty [2008a], p. 354-369, McLarty [2008b], p.370-406).

1.9 Bourbaki

Les *Éléments de mathématique*, dont le premier fascicule Bourbaki [1939] est consacré à la Théorie des ensembles, suivi par les fascicules de d'Algèbre Bourbaki [1940a] et Topologie Bourbaki [1940b], furent grandement influencés par l'algèbre abstraite et la topologie abstraite développées à Göttingen et à Hambourg, où Emil Artin menait un séminaire renommé.

44. Les nombres de Betti ont été ainsi nommés par Henri Poincaré en l'honneur d'Enrico Betti. Ce sont des invariants permettant de distinguer différents espaces topologiques. Il forment une suite dont chaque élément est un entier naturel ou $+\infty$. Les nombres de Betti sont les dimensions d'invariants algébriques « plus structurés » (espaces de cohomologie). Noter que les dimensions ne suffisent pas toujours à différencier topologiquement deux espaces ; la structure algébrique dans toute sa richesse est parfois nécessaire (nous devons cette précision à Bertrand Rémy).

L'on sait que des membres fondateurs de Bourbaki, André Weil (1906-1998), Henri Cartan (1904-2008), Charles Ehresmann (1905-1979), Claude Chevalley, entre autres, firent des séjours d'étude en Allemagne auprès de l'un ou l'autre maître de Göttingen ou de Hambourg. Artin justement salua avec enthousiasme l'ouvrage monumental de Bourbaki, dont la facture faisait ressortir l'unification par la méthode axiomatique des diverses branches des mathématiques. Dans l'article "L'architecture des mathématiques" (Bourbaki [1948], cf. Le Lionnais [1998], p. 35-47), destiné à un large public, Bourbaki explicite ce qu'était progressivement devenue la pratique du mathématicien depuis Gauss. Une structure mathématique est, écrit-il, un ensemble d'éléments non spécifiés muni d'une ou plusieurs relations régies par des conditions posées à titre d'axiomes. Il reformule l'objet d'une théorie axiomatique, déjà exprimé par Hilbert : « déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute autre hypothèse sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur "nature" propre) »(cf. Le Lionnais [1998], p. 40-41). Et il ajoute « Dans cette nouvelle conception, les structures mathématiques deviennent, à proprement parler, les seuls « objets » de la mathématique ». On ne sera pas étonné d'apprendre que les « structures-mères » de Bourbaki sont précisément celles mises en œuvre par les mathématiciens de l'École de Göttingen, à savoir les structures algébriques, les structures d'ordre et les structures topologiques. Bourbaki souligne aussi ce qui était devenu clair : la superposition de structures multiples sur un même ensemble d'éléments comme celui des nombres réels, par exemple, qui porte pour le moins une structure algébrique, une structure d'ordre, une structure topologique et une structure métrique.

Nous n'insisterons pas sur la portée mondiale de l'œuvre de mise en ordre et de systématisation de Bourbaki, son influence dans les sciences humaines (de l'anthropologie de Claude Lévi-Strauss à la psychanalyse de Jacques Lacan en passant bien entendu par la philosophie[47]), les débats et la contestation qu'elle a suscités dans les années 1970. Aujourd'hui avec l'usage universel des ordinateurs la structure a cédé le devant de la scène à l'algorithme. Cependant une partie de l'informatique théorique a besoin de la théorie des catégories, très conceptuelle, pour avancer et contribue en retour à son développement. En fait, comme le soulignait déjà Emil Artin, le concept et le calcul vont main dans la main.

47. En France Jules Vuillemin a développé une vision structuraliste des systèmes philosophiques; en pays anglo-saxon on sait l'énorme masse des contributions à la philosophie des mathématiques structurales.

1. 10 Le paradis de Cantor

Nous avons vu que des mathématiciens comme Kronecker ou Poincaré contestèrent moins l'avantage des structures mathématiques et de la méthode axiomatique que l'utilité de la théorie des ensembles infinis et la légitimité des définitions et des démonstrations non constructives. Comme l'on sait, la théorie des ensembles, esquissée par Bernhard Bolzano (1781-1848) dans son ouvrage posthume Bolzano [1851] est fondée par Richard Dedekind et Georg Cantor (1845-1918). L'établissement et la démonstration de certains théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles bénéficièrent d'un échange de lettres entre Cantor et Dedekind[48]. En permettant de traiter tout objet mathématique, nombres et fonctions par exemple, comme un ensemble, fini ou infini, d'éléments indéterminés, la théorie des ensembles apparaît comme une base générale pour toutes les disciplines mathématiques. Malgré les objections et les rejets elle est rapidement adoptée, notamment par les analystes français[49]. Par ailleurs, avec le concept cantorien de nombre transfini s'instaure une arithmétique cohérente de l'infiniment grand : en 1891 Cantor démontre par la méthode diagonale que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable et plus généralement que pour tout ensemble infini E l'ensemble des parties de E a une « puissance » (un nombre cardinal transfini) strictement supérieure à celle de E ; ainsi il y a une infinité de nombres cardinaux transfinis exactement comme il y a une infinité de nombres finis (Cantor [1890-1], repris dans Cantor [1932], trad. fr. in Rivenc and de Rouilhan [1992], 197-203). L'échelle des cardinaux transfinis commence par 0, cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels, de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et de l'ensemble $\mathbf{A}$ des nombres algébriques. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels a la puissance du continu. D'où la question dont Cantor a cherché la solution toute sa vie : le cardinal du continu est-il le successeur immédiat du cardinal du dénombrable ? C'est la fameuse « hypothèse du continu », inscrite par Hilbert en tête de sa célèbre liste de problèmes ouverts, proposée au Congrès Inter-

48. Cf. Cavaillès and Nœther [1937]. Les travaux de Cantor sont réunis dans Cantor [1932]. On pourra consulter Belna [2000], Belna [2009] ; Dauben [1979] ; Dehornoy [2009] ; Cavaillès [1938] ; Meschkowski [1967]

49. Henri Lebesgue écrit par exemple : « En osant incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours de l'École polytechnique, Jordan réhabilitait en quelque sorte cette théorie ; il affirmait qu'elle est une branche utile des mathématiques. Il faisait plus que l'affirmer, il le prouvait par ses recherches sur la mesure des aires et des ensembles, sur l'intégration qui, comme ses études sur la rectification des courbes, sur les séries trigonométriques, sur l'*analysis situs*, ont si bien préparé certains travaux, les miens en particulier. » (Lebesgue [1922], p. 16).

national des Mathématiciens qui s'est tenu à Paris en 1900. La réponse viendra plus tard et en deux temps. En 1938 Gödel montre la compatibilité de cette hypothèse avec les axiomes habituels, dits de Zermelo-Fraenkel, de la théorie des ensembles. En 1963 Paul Cohen (1934-2007) en démontre l'indépendance.

Cantor introduit également la notion de nombre ordinal transfini et, grâce au théorème du bon ordre démontré par Ernst Zermelo (1871-1953) en 1908, il est justifié de prolonger aux ordinaux transfinis l'induction complète ordinaire utilisée dans le raisonnement par récurrence sur les nombres entiers positifs ou nuls. Gerhard Gentzen (1909-1945) utilisa l'induction transfinie jusqu'à un certain ordinal transfini, nommé ε_0, pour démontrer en 1936 la cohérence de l'arithmétique élémentaire, démonstration dont Gödel avait prouvé en 1931 l'impossibilité dans le cadre de cette même arithmétique.

La manipulation d'ensembles infinis actuels entraîna le recours aux démonstrations par l'absurde. Ce fut en particulier le cas pour la première démonstration par Hilbert, en 1888, du théorème, dit de la base finie, qui affirme l'existence d'un ensemble fini de générateurs pour les invariants des formes algébriques d'un nombre n quelconque de variables. Hilbert ne construisit pas effectivement une telle base ni n'indiqua de moyen d'en construire une, mais montra que rejeter cette existence conduit à une contradiction. Cette démonstration est restée célèbre dans les annales car elle provoqua l'incompréhension du « roi de la théorie des invariants », Paul Gordan, qui jugea qu'il s'agissait « de théologie, pas de mathématiques ». C'était le choc entre le nouveau style, général et abstrait, de Hilbert et de son école et le style algorithmique de Gordan.

Cependant l'exigence d'effectivité et de constructivité des définitions et des preuves posait un défi que Hilbert releva en fournissant une preuve constructive de son théorème de la base finie et en répondant aux objections de Kronecker et de Poincaré relatives à son édification de la logique. Son but était de ne point être chassé du « paradis » de Cantor. En clair il s'agissait de sauver la théorie des ensembles des paradoxes et contradictions. En revanche Hilbert n'essaya pas de restreindre l'usage du tiers exclu aux collections finies comme le voulait Brouwer. Il œuvra plutôt à en justifier l'application aux collections infinies grâce à un axiome transfini, qui a le statut d'un élément logique idéal analogue aux éléments idéaux mathématiques. (cf. Hilbert [1923], p. 151-165). Voir la présentation claire et succincte de Boniface [2003], p. 227-229).

1. 11 Les constructivismes

Nous allons esquisser brièvement le profil des trois mathématiciens qui poussèrent Hilbert à concevoir son programme finitiste pour justifier les raisonnements de l'analyse classique et de la théorie des ensembles. Kronecker, Poincaré et Brouwer représentent trois versions de l'option constructiviste et algorithmique qui a gagné de plus en plus de terrain au XX^e siècle, grâce au développement extraordinaire de l'informatique et à l'usage intensif du calcul par ordinateur. Les limites assignées à ce chapitre ne permettent pas de développer le point de vue des semi-intuitionnistes français, Émile Borel (1871-1956), René Baire (1874-1932), Henri Lebesgue (1875-1941), qui ont appliqué la théorie des ensembles, restreinte aux infinis dénombrables (tel celui des nombres rationnels), pour édifier la théorie de la mesure et l'appliquer au calcul des probabilités.

Élève et ami de Kummer, Kronecker lui succéda en 1883 à l'Université de Berlin après avoir décliné l'offre de succéder à Riemann à Göttingen en 1868 dans la chaire occupée antérieurement par Gauss et Dirichlet. Kronecker s'est ouvertement opposé aux travaux de Cantor sur la théorie des ensembles et à la publication de certains de ses articles dans le Journal de Crelle dont il était le directeur. Pour lui le fondement ultime des mathématiques est constitué par la donnée des nombres entiers positifs ou nuls, dont il est superflu de fournir une expression ensembliste comme celle construite par Dedekind dans Dedekind [1888]. Aussi Hilbert qualifie-t-il de « dogmatiste » cette position qui attribue à Dieu la donation des entiers et propose, à l'inverse de Dedekind, de n'introduire aucun autre concept fondamental. Kronecker s'exprime clairement à plusieurs reprises contre l'introduction et le maniement de concepts nouveaux, s'opposant tant à Dedekind et Hilbert qu'à Cantor. Il vise une réduction de l'algèbre et de l'analyse aux seuls nombres naturels quand Dedekind veut étendre leurs lois à des éléments qui ne sont pas des nombres. Conséquence de son rejet de l'infini actuel, Kronecker ne conçoit de preuve de l'existence d'un objet que par construction explicite en un nombre fini de pas (cf. Weber [1891-1892] ; Edwards [1987], Edwards [1989] ; Boniface [2002]). Aussi s'oppose t-il à l'usage des nombres irrationnels, des nombres transcendants, des séries infinies, du théorème du Bolzano dit des valeurs intermédiaires, du théorème de Bolzano-Weierstrass[52]. Héritier, comme Dedekind, de Kum-

52. Dans le cas des nombres réels ce théorème affirme que de toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

mer et de Lejeune-Dirichlet, ainsi que de Jacobi et de Eisenstein, il propose une arithmétisation différente en esprit et en méthode de celle de Dedekind. En particulier il élabore une théorie distincte de celle des idéaux de Dedekind, la « théorie des diviseurs » qui présente un aspect algorithmique (cf. Kronecker [1882])[53] Éclipsée en son temps par la théorie des idéaux de Dedekind, à laquelle Hilbert donne la préférence dans son “Zahlbericht" (Hilbert [1897]), qui constitua une référence standard et une source inépuisable, elle n'engendre de postérité qu'au XX^esiècle. Pourtant dans son ‘Àlgebraische Theorie der Körper" (Steinitz [1910]), Steinitz avait aperçu le potentiel de généralité de la conception des « domaines de rationalité » [*Rationalitätsbereiche*] de Kronecker, qui ne sont pas limités à des corps de nombres, et il précise qu'il va utiliser la méthode de Kronecker pour « montrer que pour un corps K et une fonction [polynomiale] $\varphi(x)$ irréductible dans K on peut trouver une extension obtenue par adjonction à K d'une racine de $\varphi(x)$ », tout en envisageant des extensions infinies, alors que Kronecker ne traitait que d'extensions finies, et en abandonnant le langage des congruences adopté par Kronecker pour revenir à celui des équations (Steinitz [1910], p. 168-170).

Henri Poincaré (1854-1912) s'est d'abord intéressé tant à la théorie des ensembles de Cantor, dont il aurait traduit un article dans les *Acta mathematica* de Mittag-Leffler[56] et a utilisé les résultats dans son mémoire sur les groupes kleinéens[57], qu'à l'axiomatique de Hilbert dont il ne condamne pas d'entrée de jeu la recherche d'une preuve syntaxique de consistance de l'arithmétique (cf. Benis-Sinaceur [1996], p. 494-496). Il a amplement reconnu les vertus mathématiques de la méthode axiomatique, écrivant dès 1893 (Poincaré [1968], p. 49) que « les mathématiciens n'étudient pas les objets, mais les relations entre objets... La matière ne leur importe pas, seule la forme les intéresse ». Et nous avons déjà signalé l'importance qu'il accorde au concept de groupe. En 1902 il écrit un compte rendu très détaillé de Hilbert [1899] (Poincaré [1902], p. 252-271), dont il montre l'importance théorique et la signification pour le géomètre praticien. De la méthode axio-

53. Cette théorie est reconstruite et complétée en Edwards [1992]. Un idéal I d'un anneau A est un sous-ensemble de A tel que pour tout élément a de A et tout élément x de I, $ax \in I$. Un diviseur est le PGCD des éléments d'un idéal I, si bien qu'à chaque idéal I correspond bijectivement un diviseur. Pour une comparaison entre les idéaux de Dedekind et les diviseurs de Kronecker cf. Boniface [2003], chap. III. IV.1., p. 121-123. On pourra consulter aussi Edwards [1988], Edwards [1992], et Edwards et al. [1982].

56. Il s'agit de “Quelques théorèmes sur les ensembles infinis linéaires de points”, rapporte Cavaillès (Cavaillès and Nœther [1937], p. 180) dans la traduction française de 1962.

57. De même dans son mémoire “Sur les équations aux dérivées partielles de la physique" (Poincaré [1916-1956]), il emploie de façon essentielle « le langage de M. Cantor ».

matique Poincaré ne refuse que sa prétention à *fonder* la connaissance mathématique.

Comme Kronecker, Poincaré rejette l'infini actuel et les nombres transfinis de Cantor en lesquels il voyait comme une maladie dont il fallait débarrasser les mathématiques.

Comme Kronecker, il considère les entiers naturels, les « nombres vulgaires » ainsi qu'il les appelle, comme les éléments originels qui n'ont pas à être définis à partir de la supposition d'ensembles infinis (comme c'est le cas dans Dedekind [1888]), car ils sont l'objet d'une intuition première. Cette intuition découle de la puissance de l'esprit ou de « la libre initiative du mathématicien » (Poincaré [1908], p.170) plutôt qu'elle n'est l'effet d'objets ou de signes offerts à la sensibilité (comme le pensait Hilbert élaborant sa théorie de la démonstration). De même « le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement » (Poincaré [1968], p. 93). Pour Poincaré l'intuition mathématique est intellectuelle, ce pourquoi certains l'ont rapproché de Descartes ou de Husserl plutôt que de Kant.

Réagissant au paradoxe de Richard (1862-1956), Poincaré refuse les définitions, dites non prédicatives, qui définissent un ensemble E ou un de ses éléments en faisant appel à l'ensemble E lui-même (cf. Heinzmann [1986], Feferman [2005]). Jusqu'à lui les mathématiciens se servaient sans réserve particulière de ce genre de définitions, par exemple pour définir la borne supérieure d'un ensemble[58] ou pour définir l'addition sur les entiers naturels en posant $n + 0 = n$ et $n + S(m) = S(n + m)$ où S est la fonction successeur. Après lui, Hermann Weyl adopte dans sa conception du continu (Weyl [1918a]) un point de vue prédicativiste, dont Solomon Feferman (1928-2016) montre plus tard qu'il suffit pour développer toutes les mathématiques nécessaires aux sciences physiques (Feferman [1998], p. 249-283). On lira avec profit l'article de Lombardi [2002]).

Poincaré a lui-même classé (Poincaré [1886]) ses travaux mathématiques en quatre catégories principales liées les unes aux autres : 1) les équations différentielles dont il fonde l'étude qualitative, qu'il nomme *Analysis situs*, en montrant, sans résoudre explicitement les équations, la forme des courbes qu'elles définissent, 2) la théorie générale des fonctions, inven-

58. Soit E un ensemble ordonné, la borne supérieure d'un sous-ensemble F de E est, s'il existe, le plus petit des majorants de F dans E.

tant les fonctions fuchsiennes par analogie avec les fonctions elliptiques et grâce à une interprétation convenable de la géométrie de Lobachewski, 3) l'algèbre et l'arithmétique en étudiant notamment les groupes discrets de substitutions linéaires et les formes quadratiques à propos desquelles il introduit le concept d'invariant arithmétique et montre le lien avec les groupes fuchsiens, 4) la mécanique céleste en proposant à nouveau une approche qualitative et en étudiant certaines solutions particulières du problème des trois corps. Précisons que Poincaré est le génial précurseur de la théorie de la relativité restreinte, de la théorie des systèmes dynamiques et de la théorie du chaos.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) est l'auteur de résultats fondamentaux en topologie algébrique : première définition correcte de la dimension d'un espace topologique, démonstration générale (et non constructive) de l'invariance topologique de la dimension[61] et démonstration du théorème du point fixe[62]. Sa conception des bonnes pratiques mathématiques est assez proche de celle de Kronecker et de celle de Poincaré qu'il a rencontré à Paris en 1909. Comme ce dernier il conçoit les mathématiques comme une *activité de l'esprit*, ce qui lui valut de la part de Hilbert le reproche acrimonieux de subjectivisme. Tandis que Hilbert mettait en place des procédures de manipulation des symboles de langages formels, Brouwer fondait en effet le développement de toute activité mathématique dans l'acte de conscience générateur d'objets internes antérieurs à leur expression dans un langage[63]. Pour Brouwer, comme pour Kronecker et Poincaré, au commencement de toute mathématique il y a les nombres entiers, qui ne sont pas donnés par Dieu comme le pensait Kronecker, mais par une intuition intellectuelle qu'il caractérise d'une manière différente de celle de Poincaré. En effet l'intuition brouwerienne est liée à la perception originaire du glissement du temps qui, abstraction faite de son caractère émotionnel, engendre la dyade, le deux, et par itération indéfinie tous les autres entiers (Brouwer [1913], trad. fr. Largeault [1992], p. 43-44). Les nombres entiers ne sont pas *objet* de l'intuition mais *produit* de l'acte intuitif fondamental du « Sujet créateur », qui s'incarne dans les mathématiciens. Il n'y

61. Le théorème peut être énoncé comme suit : Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction injective continue, alors $V = f(U)$ est ouvert et f est un homéomorphisme entre U et V. Conséquence : si $m \neq n$, $\mathbb{R}^n$ ne peut être homéomorphe à $\mathbb{R}^m$.

62. Si f est une fonction continue définie dans un intervalle fermé borné non vide I et à valeurs dans I, il existe un point x_0 tel que $f(x_0) = x_0$. Plus généralement f est définie sur un convexe compact K d'un espace euclidien et à valeurs dans K.

63. « La mathématique intuitionniste est une construction mentale essentiellement sans langage » (Brouwer [1947], trad. fr. Largeault [1992], p. 417).

a de vérité qu'expérimentée dans une construction introspective. Aussi la présupposition d'un univers immuable d'objets indépendant du sujet pensant est-elle remplacée par la conception d'un univers d'objets en devenir et non prédéterminé. Pas plus que Poincaré, Brouwer n'accorde un rôle fondateur à l'axiomatique des entiers.

Comme Kronecker, Brouwer est hostile au raisonnement symbolique sur des entités abstraites ; il rejette les preuves d'existence indirectes (par l'absurde)[64], distingue explicitement entre propositions démontrées et propositions non contradictoires. De plus, il est le premier à mettre en question de manière directe et explicite la validité de la logique aristotélicienne, et notamment du tiers exclu[65], dans le cas des systèmes infinis. En même temps il conçoit les totalités infinies comme des processus séquentiels sans fin dont les termes successifs sont plus ou moins librement déterminés. Aussi faut-il reconstruire l'analyse sur une autre base que la théorie cantorienne des ensembles, qui suppose la validité universelle du tiers exclu, accepte l'infini actuellement donné et les définitions non prédicatives. Brouwer identifie les nombres réels (le continu numérique) à des suites de choix satisfaisant certaines conditions. Les suites de choix sont des processus dynamiques dont la construction n'est fondamentalement jamais achevée[66].

La critique du tiers exclu par Brouwer n'a été systématiquement prise en compte que récemment, grâce au livre de Bishop [1967]. Ce livre a donné un nouvel essor au programme de mathématiques constructives en montrant que la croyance traditionnelle selon laquelle le point de vue constructif amputait gravement les mathématiques classiques était fausse. Bishop fournit en effet une version constructive d'une très large part de l'analyse classique et donne un contenu algorithmique à tous les théorèmes qu'il démontre.

Les mathématiques constructives réalisent une version constructive, plutôt que finitiste, du programme de Hilbert. Leur essor est autant l'effet d'une tendance interne aux mathématiques (comme dans le cas de Gordan ou Kronecker) que du coup de fouet donné par l'informatique. Comme l'explique Gilles Dowek (Dowek [2011], notamment p. 135-138, ou l'analyse de

64. Brouwer rejette la preuve de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers donnée par Euclide, parce qu'elle repose sur un raisonnement par l'absurde.

65. Pour Brouwer admettre le tiers exclu équivaut à supposer que tout problème mathématique a une solution.

66. Sur les suites de choix, les species (« propriétés supposables d'objets mathématiques déjà obtenus ») et les déploiements (substitut intuitionniste des ensembles) cf. Brouwer [1947], trad. fr. Largeault [1992], p. 415-417.

la démonstration du théorème des quatre couleurs, p. 169-179), les règles de calcul prennent une place de plus en plus importante à côté des axiomes (et des règles de déduction) pour construire des démonstrations. Sa conclusion est en forme de question : « Le calcul nous permettra-t-il de nous débarrasser un jour des axiomes ou, malgré le calcul, serons-nous toujours contraints de leur laisser une place dans l'édifice mathématique ? ».

2. L'explosion des mathématiques au XXe siècle, quelques grandes lignes de recherche, et l'avenir

Le XXesiècle a vu une énorme explosion des mathématiques et des mathématiciens. C'ést aussi le siècle où les mathématiques sont devenues plus spécialisées et les mathématiciens moins savants, car on parle de Hilbert comme « la dernière personne qui a compris toutes les mathématiques », titre qui lui est parfois disputé par ceux qui se réfèrent plutôt à Poincaré ou à John Von Neumann (1903-1957). Des nouvelles inventions technologiques ont beaucoup influencé les mathématiques et, bien sûr, on pense ici surtout à l'invention de l'ordinateur, qui a inspiré des mathématiques mais qui a aussi remplacé beaucoup de travail manuel et a permis aux mathématiciens de développer leurs expériences numériques beaucoup plus rapidement. Les ordinateurs sont même entrés dans la sphère des preuves, d'un côté en termes d'assistants de preuves, mais de l'autre côté aussi comme acteurs de preuves, en commençant par la célèbre résolution en 1977 du Problème de quatre couleurs à l'aide d'un ordinateur Appel and Haken [1989]. Pour ce qui est de négatif dans ce siècle si controversé, les deux guerres mondiales et la guerre froide qui a suivi ont laissé une lourde trace sur la vie et sur les mathématiques, dont beaucoup se sont développées pour et avec l'aide de l'armée. La guerre froide était aussi la guerre de la science et une compétition acharnée dans tous les domaines, dont les mathématiques. Tandis que les mathématiques du XXesiècle ont développé un tel niveau d'abstraction que les mathématiciens ne furent plus capables de lire les articles en dehors de leur domaine de spécialité, plus ou moins étendu suivant le cas, en même temps la connexion avec la réalité, parfois une réalité perfide et inattendue, était devenue obligatoire. Des mathématiciens ont péri dans les camps de concentration ou étaient obligés de se sauver par un changement complet d'environnement et parfois de domaine. Certains ont travaillé pour des dictateurs, d'autres contre. Tous ces changements sociologiques ont fait que les centres traditionnels de mathématiques en Europe, ont, à quelques grandes exceptions près, cédé place aux nouveaux venus, dont l'Union Soviétique, les États-Unis et l'Israël. Le côté positif de ces changements est un nouveau visage, plus démocratique. Le mathématicien n'est plus seulement un homme blanc barbu. Il n'écrit plus dans un allemand raffiné ni dans un français distingué, il écrit dans un anglais assez simplifié venu directement du côté pragmatique des États-Unis, tout le monde peut y participer. D' un autre côté, les journaux mathématiques souffrent d'une compétition des publications publiées tout sur l'internet. La culture "publish or perish" (publier ou disparaître) introduit une dimension de quantité qui remplace parfois la qualité. Où se trouve la 'vieille' Europe, toujours attachée à ses valeurs d'antan ? Malgré la pression, positive et négative, de changer, on a besoin de ces valeurs pour équilibrer ce qui est devenu parfois anarchique plutôt que démocratique. Plus récemment, grace à l'action continue de l'Union Européenne et à l'évolution du climat scientifique d'une Europe qui veut se rajeunir, le mouvement mondial des mathématiciens touche encore une fois l'Europe et nous sommes témoins d'une grande mobilité des chercheurs en Europe et vers l'Europe. Le monde des mathématiques est aujourd'hui vaste et l'Europe y joue un rôle central.

Il serait très difficile, ou impossible, de parler de toutes les mathématiques du XX^e^siècle dans un article de modeste longueur. Il fallait faire des choix et comme chaque choix, le nôtre reflète nécessairement une subjectivité et ne pretend pas dire la vérité absolue. Il est porté aussi sur ce qui forme notre propre base de connaissance, donc surtout la logique et les fondements. Tout ce qui mérite d'être connu n'est pas entré dans notre sélection. En revanche, tout ce qui y est, mérite d'être connu. Nous avons surtout choisi quelques histoires représentatives qui montrent les mouvements emblématiques du siècle. Pour ce qui est d'un choix plus large, on peut consulter les six articles Zalamea [2009], Zalamea [2011a], Zalamea [2011b], Zalamea [2012a], Zalamea [2012b] et Zalamea [2013]. Il semble, à posteriori, que notre choix a privilégié quelques mathématiciens très importants qui n'ont néanmoins pas eu la médaille Fields[69], cette coïncidence peut être interprétée selon le lecteur.

69. Cette médaille, donnée grâce au mathématicien canadien John Fields (1863-1932) qui a légué ses biens à la science afin de contribuer au financement de la médaille, est donné depuis 1936 tous les quatre ans à un ou plusieurs mathématiciens âgés moins de 40 ans. Elle est, avec le Prix Abel, une des deux plus prestigieuses récompenses en mathématiques.

2. 1 La logique et les mathématiques, le programme de Hilbert

Avant le XIX^e siècle, la logique était une discipline plutôt philosophique, mais la crise des fondements provoquée par la découverte des manques et des paradoxes en mathématiques a donné lieu à une réflexion profonde des mathématiciens et une volonté d'axiomatisation qui est vue comme la seule issue de la crise. En plus de ce travail axiomatique de Dedekind, Gottlob Frege (1848-1925), Hilbert et Peano, déjà évoqué plus haut, il s'agit aussi d'une mathématisation de la réflexion logique portée par les travaux de George Boole (1815-1864) qui introduit dans son livre Boole [1854] ce que nous appelons aujourd'hui les algèbres de Boole, et Augustus De Morgan (1806-1871), qui a formulé les lois de De Morgan et a introduit le principe de l'induction mathématique. Pour souligner l'importance de ces découvertes, même si on retrouve chez Leibniz au XIX^e siècle un traitement formel des mathématiques, avec une notation mathématique moderne et une logique tout à fait développée, l'élément qui relie la logique classique aux mathématiques est le travail de Boole sur les algèbres de Boole et les valeurs de vérité, permettant ainsi d'avoir une structure *algébrique* et un « calcul de vérité » qui englobe la logique des propositions. Les résultats de Boole ont montré, pour la première fois, que le langage des mathématiques est lui-même un objet à étudier. L'algèbre de Boole est à la base de l'informatique.

On sait bien que cette époque est aussi celle qui a donné lieu à la théorie des ensembles, découverte par Cantor dans sa forme naïve (c'est-à-dire, non-axiomatique) dans les années 1870, voir §1. 10. L'idée principale de cette théorie est de pouvoir former les 'ensembles' en collectionnant dans un même objet tous les objets qui satisfont une même propriété, ou, dirait-on aujourd'hui, une même formule. Cantor était surtout intéressé par les conséquences mathématiques de sa théorie et il a réussi à en tirer beaucoup, par exemple sa preuve dans Cantor [1874] que la plupart des nombres réels sont transcendants. Mais, autour de Cantor, il y avait un enthousiasme énorme, par Hilbert et son école, pour utiliser les ensembles comme la base de toutes les mathématiques. Cela était une chose très raisonnable dans leur perspective, car la totalité des mathématiques connues à l'époque pouvait s'exprimer en termes d'ensembles. Ce « paradis » de Cantor, pour citer Hilbert, était perturbé par la découverte par Bertrand Russell (1872-1970) dans Russell [1902] d'un paradoxe qui provient de la supposition que la collection des ensembles forme elle-même un ensemble. Ce même paradoxe, ironiquement, a aussi eu une incidence sur la formalisation de Frege et, seulement quelques jours avant de la publication de son œuvre Frege [1903] vol. II, il a dû accepter que le paradoxe de Russell montre qu'on ne peut pas formaliser toutes les mathématiques de la façon proposée dans son axiomatisation. Le paradoxe de Russell a inspiré Russell pour développer la théorie des types, qui est utilisée dans Whitehead and Russell [1990] pour représenter toutes les mathématiques connues à l'époque sur cette base. Même si cela n'est pas entré dans le quotidien des mathématiciens, de grandes découvertes ont été faites par la théorie des types, notamment dans le travail de Per Martin-Löf (né en 1942) dans les années 1960, qui a découvert la théorie dépendante des types. Cette théorie a été plus tard utilisée comme la base théorique de Coq, dans la vérification des preuves, découverte par Thierry Coquand (né en 1961) dans les années 1980. À son tour, Coq est utilisé dans le projet de formalisation des mathématiques dans la communauté HoTT, la théorie des types homotopiques, découverte par Vladimir Voyevodsky (1966-2017) en 2005.

Le programme de Hilbert dont on a déjà parlé dans la première partie de cet article, véhiculé dans son célèbre discours de 1900 au congrès international des mathématiques à Paris, est inscrit dans l'idée d'une formalisation complète des mathématiques et d'une possibilité de rendre toutes les preuves algorithmiques. Même si les deux ont été démontrées impossibles, la première par le travail de Gödel [1931] et la deuxième par le travail d'Alan Turing (1912-1954) dans Turing [1936], leur influence sur les mathématiques du XXe siècle a été énorme. Les problèmes de Hilbert sont 23 en nombre et plusieurs portent sur la logique. Le premier était l'Hypothèse de Continu de Cantor[72], démontrée indépendante des axiomes ZFC par les travaux de Gödel [1938] et Cohen [1963] et le deuxième le problème de la cohérence de l'arithmétique, c'est-à-dire de démontrer par des moyens finitistes la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique (voir sur les travaux de Gentzen plus haut). Le programme de Hilbert a suscité de nombreux travaux en logique dans le premier quart du XXe siècle, dont le développement de systèmes d'axiomes pour les mathématiques : les axiomes de Peano pour l'arithmétique, ceux de Zermelo complétés par Thoralf Skolem (1887-1963) et Abraham (né Adolf) Fraenkel (1891-1965) pour la théorie des ensembles, ainsi que le développement par Alfred North Whitehead (1861-1947) et Russell d'un programme de formalisation des mathématiques utilisé dans *Principia Mathematica* Whitehead and Russell

72. On peut la comprendre en disant que chaque sous-ensemble des réels est soit dénombrable soit bijectif avec l'ensemble des réels.

[1990]. C'est également la période où apparaissent les principes fondateurs de la théorie des modèles : notion de modèle d'une théorie, théorème de Löwenheim-Skolem. On discutera en plus de détails la théorie des modèles dans §3. 3.

Déjà dans sa thèse de doctorat en 1929 Gödel (cf. Gödel [1930]) a démontré la complétude de la logique du premier ordre, qui fait des questions de cohérence une recherche des modèles. Ce théorème montre que d'une certaine manière le programme de Hilbert réussit, car toute démonstration mathématique peut être représentée dans le formalisme du calcul des prédicats. Mais, en Gödel [1930] le même Gödel a démontré ses théorèmes d'incomplétude qui montrent qu'il n'est pas possible de donner une axiomatisation complète des mathématiques en partant d'une liste d'axiomes capable de déduire l'arithmétique de Peano. La cohérence d'une telle liste n'est pas une conséquence de ces seuls axiomes. La fin du programme de Hilbert se trouve finalement dans le travail de Turing, qui a démontré qu'il y a des résultats mathématiques qui ne peuvent pas être obtenus par un algorithme. Notamment, l'ensemble des théorèmes du calcul des prédicats n'est pas calculable, c'est-à-dire qu'aucun algorithme ne permet de vérifier si un énoncé donné est prouvable ou non.

Malgré ces résultats négatifs, la logique a continué à se développer et à contribuer aux mathématiques. Hilbert a initié la théorie des démonstrations, qui a été poursuivie par Gentzen en donnant la première démonstration de la cohérence relative dans Gentzen [1936] qui montre la cohérence relative de l'arithmétique. Cela a initié ainsi un programme de classification des théories axiomatiques.

La période de ces découvertes a été marquée par deux guerres mondiales. Le seconde guerre mondiale était particulièrement dure pour les mathématiciens en Allemagne (et en Europe en général), dont plusieurs ont péri (comme Felix Hausdorff (1868-1942), qui s'est donné la mort pour ne pas tomber dans les mains de la Gestapo) ou sont partis pour d'autres parties du monde (comme Gödel) ou se sont engagés du mauvais côté (comme Gentzen) et ont péri à leur tour. Hilbert est mort dans l'obscurité et la solitude en 1943, ayant déclaré qu'il n'y avait plus des mathématiques à Göttingen.

3. Fondements

Après la découverte du paradoxe de Russell et les phénomès de l'incomplétude, les mathématiques ont cherché des fondements alternatifs. Une réponse intéressante est arrivée par la théorie des types, dont on a déjà parlé, et une autre par la théorie des catégories. Cette théorie a été inventée comme les fondements alternatifs de la topologie algébrique par Samuel Eilenberg (1913-1988) et Saunders Mac Lane (1909-2005) en 1942-1945, mais propagée dans les années 1960-1970 par Alexandre Grothendieck (1928-2014) qui en fit une étude systématique et un fondement de son œuvre fondamentale dans la géométrie algébrique, qui reste toujours partiellement un mystère, de nos jours. Dans notre liste il est parmi ceux qui ont eu la médaille Fields, en 1966, avant de rejeter toutes les autres récompenses qui ont lui été proposées dans les années suivantes. La théorie des catégories avec la théorie de types est parmi les ingrédients de HoTT. D'autres fondements alternatifs ont été proposés et sont utilisés, comme la théorie de topoi.

Pour ce qui est de l'indépendance, une autre découverte révolutionnaire dans les fondements, on peut la tracer encore à Gödel. À part son travail sur la complétude et l' incomplétude, il a aussi travaillé sur la question pressante de la théorie des ensembles : depuis qu'elle avait été posée par Cantor en 1878, on ne savait pas si l'hypothèse du continu HC était vraie. Dans Gödel [1938], Gödel a découvert l'univers constructible L, et l' a utilisé pour démontrer la cohérence relative de HC par rapport de ZF, ainsi que la cohérence relative de ZFC. Ces résultats sont toute suite entrés dans l'usage mathématique, beaucoup plus que ses résultats en logique, d' autant plus que beaucoup de mathématiciens étaient convaincus qu'un jour on démontrerait l'hypothèse. Pas Gödel, qui de sa façon étonnante a prédit dans ses écrits que HC est indépendant de ZF. Il a dû être le seul à ne pas être stupéfié quand Cohen [1963] a démontré l'indépendance de HC en 1963, ce qui lui a valu la médaille Fields en 1968. La méthode de Cohen, forcing, a pu être utilisée afin de démontrer l'indépendance d'un grand nombre d'énoncés dans tous les domaines mathématiques. Des conséquences philosophiques et mathématiques de l'indépendance sont vastes et forment un domaine de recherches en elles-mêmes. La théorie des ensembles moderne est d'un côté une recherche d'une complétion axiomatique pour résoudre la HC, en acceptant les axiomes des grands cardinaux si nécessaire[75], comme dans le

75. Les axiomes des grands cardinaux ne donnent pas la réponse directe à la HC, par le

travail de Hugh Woodin (né en 1955) et, d' un autre côté, une découverte de combinatoire en ZF qui ne dépend pas de HC, comme dans le travail de Saharon Shelah (né en 1945) (voir aussi §3. 3). La connexion fine entre la théorie des ensembles, l'indépendance et d'autres domaines des mathématiques a été mise en oeuvre surtout par le travail en topologie, où on distingue le nom de Mary Ellen Rudin (1924-2013), qui a utilisé la théorie des ensembles afin de comprendre la structure générale d'un espace topologique abstrait. La topologie et la théorie des ensembles ont trouvé leur connexion proche depuis le travail fondamental de Hausdorff. La topologie dite 'générale' qu'on utilise dans ces travaux, a beaucoup souffert pendant la guerre froide, car les deux grands groupes de chercheurs se trouvaient aux États-Unis et dans l'Union Soviétique, deux pays sans contact scientifique. De nombreux topologists ont travaillé en Union Soviétique. Notons les travaux d'Andreï Kolmogorov (1903-1987), autant en topologie qu'en théorie des probabilités, théorie d'information et l'algorithmique, qui continuent de marquer les recherches en logique de nos jours.

3. 1 von Neumann, Turing et les ordinateurs

Probablement l'invention la plus importante du siècle fut celle de l'ordinateur. Abordons-la par la personnalité de John von Neumann (1903-1957). Né Neumann János Lajos, il était un mathématicien américano-hongrois. Il était un enfant prodige et les anecdotes sur son enfance ne manquent pas : il sait lire à deux ans et converser en grec ancien à six ans. Ses prouesses ont continué pendant toute sa vie. Son travail, dont la mécanique quantique et l'analyse fonctionnelle, a commencé avec la théorie des ensembles et a fini par l'informatique. Le fil qui coud ensemble ces activités diverses est, pour l'un, le programme de Hilbert, avec qui von Neumann a travaillé à Göttingen entre 1926 et 1930 et deuxièmement son engagement avec l'armée américaine depuis 1940.

Von Neumann a répondu à plusieurs parties du programme de Hilbert, de façon directe ou indirecte. En fondements des mathématiques, il a travaillé sur la théorie des ensembles, où il est l'inventeur de la notion moderne d'un ordinal et à l'origine dans sa thèse de doctorat en 1925 à l'université de Budapest, de l'Axiome de Fondation, qui permet de hiérarchiser

résultat d'Azriel Lévy (né en 1934) et Robert Solovay (né en 1938) dans Lévy and Solovay [1967] l'univers des ensembles. Il adhérait au programme de Hilbert, mais il était un des premiers à avoir compris l' impact véritable de l'incomplétitude de Gödel.

Le travail de von Neumann dans la théorie des ensembles est très important. La définition courante d'un ordinal a été trouvée par lui et il a avancé l'idée de mesure. Il a proposé une caractérisation de l'algèbre de Boole qui supporte une mesure en termes algébriques, qui a été trouvée insuffisante dans Talagrand [2006], mais qui a beaucoup influencé le sujet, notamment en inspirant à Dorothy Maharam (1917-2014) son célèbre théorème de types d'isomorphismes d'algèbres de mesure Maharam [1942].

Le sixième problème de Hilbert porte sur l'axiomatisation de la physique. La mécanique quantique était lente à être acceptée par les physiciens et encore dans les années 1930 on voit beaucoup de méfiance de la part de plus grands physiciens comme Albert Einstein (1879-1955). Mais dès 1926 von Neumann s'attaque à la formalisation de la physique quantique et donne une formalisation complètement mathématique, où l'on identifie un système quantique par un vecteur dans un espace de Hilbert. Cette formulation est publiée dans le livre von Neumann [1932].

Toujours dans l'optique des mathématiques appliquées, Von Neumann a fait une contribution très importante à l'économie. En 1928 il a démontré le théorème du minimax qui énonce que, dans un jeu à somme nulle avec information parfaite, chacun dispose d'un ensemble non-vide de stratégies optimales. Il existe au moins une situation d'interaction stable, à savoir une situation dans laquelle aucun des deux joueurs n'a intérêt à changer sa stratégie mixte si l'autre ne la change pas. Cela a été généralisé par John Forbes Nash (1928-2015) en 1950 pour les jeux de n joueurs. Von Neumann écrit avec Oskar Morgenstern le célèbre von Neumann and Morgenstern [1944] qui donne les bases de l'application de la théorie des jeux à l'économie. Il a fait d'autres contributions importantes à l'économie, dont son travail sur l'équilibre économique.

Malgré toutes ces contributions fondamentales, la contribution la plus importante de von Neumann se trouve dans un travail très appliqué : en se basant sur le travail mathématique de Turing, von Neumann a inventé l'ordinateur. L'histoire de cette découverte est bien plus complexe que cela, car Turing [1936] présente une expérience de pensée, un ordinateur théorique, la machine de Turing. Turing a passé deux ans 1937-1938 à Princeton travaillant avec Alonzo Church (1903-1995) et des discussions entre lui et von

Neumann ont évidement avancé l'idée d'un ordinateur physique, qui n'a vu le jour que pendant la seconde guerre mondiale (en Allemagne par Konrad Zuse (1910-1995) et aux Etats-Unis par von Neumann). L'architecture de von Neumann est utilisée dans la majorité des ordinateurs modernes. Il faut aussi parler de la modélisation par les automates cellulaires, qui sont inventés par von Neumann et Stanisław Ulam (1909-1984). Ils formalisent la connexion que von Neumann a trouvé entre les mathématiques et la vie, car ce modèle préfigure celui de la reproduction cellulaire et de l'ADN.

Von Neumann a travaillé sur la bombe atomique, pendant, mais aussi après, la seconde guerre mondiale et était un homme avec des idées politiques assez discutables.

3. 2 Erdős, qui 'jouait' aux mathématiques, qui nous jouent leur tour

Nous avons déjà évoqué l'effet catastrophique que la seconde guerre mondiale a eu sur les mathématiques en Europe, souvent parce que des plus grands parmi les mathématiciens de l'époque était d'origine juive. Le cas en question est celui du grand mathématicien Paul ou Pàl Erdős (1913-1996), dont la vie a été complètement basculée par cette guerre, mais dont il a su faire une histoire mathématique complètement unique. C'était un mathématicien juif hongrois qui a marqué les recherches en mathématiques combinatoires. Il est connu pour ses résultats, ses nombreux articles, plus que 1500, et une vie dédiée absolument aux mathématiques. Parmi ses découvertes on trouve la méthode probabiliste en combinatoire, de grandes avancées en théorie de Ramsey, en théorie combinatoire des ensembles et d'autres sujets. En 1932, alors qu'il était encore étudiant, il se fait connaître de la communauté mathématique en re-démontrant le théorème de Tchebychev (aussi appelé le postulat de Bertrand). Il obtient de ce fait son doctorat de mathématiques à 21 ans, sans même finir le cursus de l'université. Il a vite compris l'avenir des juifs en Europe à cette époque et il s'exile à Manchester et plus tard aux États-Unis. Il y travaille à l'université de Princeton et à l'université de Wisconsin. Il perd presque toute sa famille pendant la guerre, dont son père. Sa mère a survécu dans la clandestinité et, depuis, jusqu'au sa mort, elle a vécue avec Erdős, partageant sa vie de voyages et de mathématiques.

Malgré la guerre et ses conséquences, la période a été très propice pour les mathématiques d'Erdős. En 1948, il trouve avec Atle Selberg (1917-2007) une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers. Mais Selberg publie seul une preuve un peu différente Selberg [1949] et obtient la médaille Fields (pour l'ensemble de son oeuvre) en 1950. Malgré ce manque malheureux de la médaille, Erdős a reçu bien d'autres récompenses, dont le Prix Bolyai et le Prix Wolf.

Erdős a vécu une vie itinérante, car n'ayant pas obtenu un poste permanent convoité à Princeton après la seconde guerre mondiale[80], il a décidé de voyager pour le reste de sa vie, enchaînant les visites mathématiques. Ce qu'il a réussi à faire. Il a contribué à tous les aspects des mathématiques discrètes, qui pendant la vie d'Erdős étaient parfois snobées comme 'les mathématiques pour jouer' et Erdős lui-même a été critiqué pour le manque présumé des théories. Sa vision mathématique a été largement confirmée par les connexions trouvées entre les mathématiques discrètes et l'infomatique et leur immense applicabilité, qui ont valu le prix Abel à son étudiant Endre Szémeredi (né en 1940) en 2012 pour, entre autres, la découverte de son Lemme de Régularité en théorie des graphes. L'impact mathématique d'Erdős ne pas était seulement l'impact direct, mais aussi l'impact indirect qu'il a réussi à'avoir par ses nombreuses collaborations et supervisions et aussi en étant le messager des mathématiques entre les deux blocs politiques dans l'atmosphère de la guerre froide où la liberté des idées et de mouvement était sévèrement restreinte. C'est souvent seulement grâce à Erdős qu'un mathématicien à l' Ouest pouvait apprendre les résultats d'un autre mathématicien à l'Est et vice versa. L'école d'Erdős est aujourd'hui représentée par de nombreux mathématiciens de grand renom, dont Lászlo Lovás (né en 1948) et Balász Szegedy (né en 1974), les inventeurs du concept de graphon qui fait le pont entre les mathématiques discrètes et l'analyse (cf. Lovász [2012]) et qui a trouvé des applications dans les statistiques, la physique et l'informatique, et Peter Komjáth (né en 1953), qui travaille dans la théorie des graphes et la théorie des ensembles.

3. 3 Tarski, Shelah et la théorie des modèles

La structuralisation des mathématiques déjà commencée avec la notion de groupe, comme évoqué en §1., et une meilleure compréhension de la lo-

80. à noter qu'au contraire de son collègue d'études et de Princeton, John von Neumann, Erdős a refusé de travailler sur la bombe atomique

gique mathématique, ont évolué durant le XX^e siècle et sont devenues une discipline séparée, la théorie des modèles. Gerald Sacks (né en 1933) dit dans son livre Sacks [1972] « It is not necessary to be a historian of model theory to realize that the subject owes its existence to the efforts of one man, Alfred Tarski », c'est à dire qu'il n'est pas nécessaire d'être un historien de la théorie des modèles pour comprendre que le sujet est né par les travaux d'un homme, Alfred (Teitelbaum) Tarski (1901-1982). C'était un mathématicien juif, puis catholique, polonais et américain. Travaillant sous la direction du célèbre logicien et philosophe Jan Łukasiewicz (1878-1956), Tarski obtient son doctorat de l'université de Varsovie dès l'âge de 22 ans. Dans un de ses premiers articles, dans la théorie des ensembles, il montre avec Stefan Banach (1895-1945) qu'il est possible de décomposer une boule en $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de morceaux et de rassembler ces morceaux pour former deux boules identiques à la première, à un déplacement près (ce paradoxe implique que les morceaux sont non mesurables). Il continue son travail en logique et dans les années 1930 publie une série d'articles sur le concept de vérité dans les langues des sciences déductives, qui ont eu une influence énorme. En 1939, Tarski se trouve en visite aux États-Unis et décide d'y rester car la guerre est imminente. Heureusement pour lui, car presque tous ses proches sont tués dans les camps nazis. En 1942 il obtient un poste à Berkeley où il fait de Berkeley le plus grand centre de la logique dans le monde entier. Il est le père fondateur de la théorie des modèles. Parmi ses résultats on trouve la preuve de décidabilité des théories comme celle des algèbres de Boole ou des corps algébriquement clos, ainsi que l'indécidabilité de la théorie des treillis. Dans la théorie des modèles, Tarski a donné la sémantique, notamment la définition de satisfaction dans un modèle d'un langage de la logique du premier ordre.

Tarski est très connu pour ses contributions en logique, mais en fait la logique pure forme la minorité de son oeuvre, voir Givant and McKenzie [1986], publié en 2500 pages. Pour Tarski, les mathématiques et les métamathématiques n'avaient pas de frontière. Pour citer Benis-Sinaceur [2001] (traduction par H. Benis-Sinaceur) : « Entre les mains de Tarski la métamathématique devint semblable à n'importe quelle discipline mathématique. Non seulement les concepts et résultats métamathématiques furent mathématisés, mais encore ils furent intégrés aux mathématiques ordinaires... Tarski a détruit la frontière entre mathématiques et métamathématiques, il a refusé de limiter le rôle de celles-ci à la seule fondation des mathématiques. »

Tarski était un mathématicien formidable mais aussi un meneur de tout un groupe de logiciens et cela pendant au moins 25 ans à Berkeley. Parmi ses étudiants on trouve Andrzej Mostowski (1913-1975), Bjarni Jónsson (1920-2016), Julia Robinson (1919-1985) (qui, avec le mathématicien soviétique Iourri Matiayasevich (né en 1947) à résolu le dixième problème de Hilbert sur la décidabilité d'équations Diophantiennes), Robert Vaught (1932-2016), Solomon Feferman (1928-2016), Richard Montague (1930-1971), James Donald Monk (né en 1930), Haim Gaifman (né en 1934) and H. Jerome Keisler (né en 1936). Keisler a travaillé sur tous les aspects de la théorie des modèles et en 1966 il a écrit, avec Chen Chung Chang (né en 1927), un autre étudiant de Tarski, le livre Chang and Keisler [1990] dont l'influence a été énorme. Grâce à ce livre la théorie Tarskienne des modèles est sortie de Berkeley et a traversé le monde. Ella a trouvé en Israël celui qui a repris l'esprit de ce sujet de Keisler et Tarski et en a fait des avances merveilleuses : Shelah. Le mathématicien le plus prolifique jamais connu, il est impossible de parler de toute son oeuvre dans un seul article. Nous ne pouvons pas nous passer de dire qu'en théorie des modèles, il a développé la "théorie de la classification" Shelah [1990] qui lui a permis de démontrer la conjecture de Morley. Les outils et les concepts qu'il a introduits ont profondément transformé le sujet. Le sujet a aussi une autre vie, portant sur les applications très directes en mathématiques, dont la théorie des modèles algébriques et géométriques, développée par les mathématiciens tels que Ehud Hrushovski (né en 1959) et Boris Zilber (né en 1949). En théorie des ensembles, Shelah a fait les découvertes révolutionnaires, telles que le forcing propre Shelah [1998] et la théorie de pcf Shelah [1994].

La vie et l'oeuvre de Tarski font le sujet de nombreuses biographies et études, dont Feferman and Feferman [2008], Benis-Sinaceur [2001] et Benis-Sinaceur [2009].

3. 4 Pologne, Banach et le Livre écossais

Dans la Pologne libre d'après la première guerre mondiale, après 120 ans d'occupation allemande et russe, la vie culturelle et scientifique a fleuri. Les mathématiques en Pologne se sont développées d'une manière époustouflante, surtout dans les domaines de la théorie des ensembles, la topologie, la logique et l'analyse. Présentons cette histoire par l'exemple de l'école de mathématique de Lwów et un de ses fondateurs, Banach, dont l'oeuvre et la vie représentent toute la gloire et la tragédie de l'école mathématique polonaise entre les deux guerres. On pourrait en fait parler de l'école de Lwów et de Varsovie, dont font partie entre autres Łukasiewicz (qui été ministre de l'éducation en Pologne en 1919 après avoir été professeur à Lwów) et Tarski, mais il nous suffira de prendre Lwów comme un exemple indicatif.

Banach est l'inventeur de l'analyse fonctionnelle dont le nom est associé aux espaces de Banach, aux algèbres de Banach et à plusieurs théorèmes. Son livre Banach [1993] est un favori des générations de mathématiciens. Autodidacte, il a obtenu son doctorat avec Hugo Steinhaus (1887-1972) en 1920, après seulement deux années d' études universitaires. Banach a passé l'essentiel de sa carrière à Lwów, une ville polonaise à l'époque et ukrainienne (Lviv) aujourd'hui. Il était un des mathématiciens les plus influents du siècle, l'inventeur des espaces de Banach, de l'algèbre de Banach, avec Hans Hahn (1879-1934) l'auteur du théorème de Hahn-Banach en 1932, avec Juliusz Schauder (1899-1943) l'auteur du théorème de l'application ouverte en 1929. Avec Tarski il est l'auteur du paradoxe de Banach-Tarski en 1924, ce que nous avons évoqué en §3. 3. Les mathématiciens de Lwów avait un esprit de collaboration. Steinhaus et Banach ont fondé une nouvelle revue mathématique, *Studia Mathematicae* avec pour centre d'intérêt l'analyse fonctionnelle. Ils se réunissaient toutes les semaines dans un café, « Café écossais » , où ils discutaient des mathématiques et écrivaient des résumés de leurs discussions dans un cahier gardé par le propriétaire. Ce fut le célèbre *Livre écossais*.

L'école de mathématique de Lwów a subi des conséquences graves de l'occupation allemande de la ville, en 1941, car l'élimination de l'intelligentsia polonaise faisait partie intégrante des plans allemands durant la Seconde Guerre mondiale. Plusieurs membres du groupe de Lwów sont juifs. Steinhaus vit l'occupation allemande dans la clandestinité, Władyslaw Orlicz (1903-1990) a survécu à la guerre grâce à une visite imprévue à Lemberg, Herman Auerbach (1901-1942) meurt dans le camp d'extermination de Belzec, Stanisław Saks (1897-1942) est exécuté par la Gestapo, Ulam a émigré aux Etats Unis où il a développé la théorie qui permit la bombe à hydrogène, Mark Kac (1914-1984) a aussi émigré aux Etats-Unis, Stefan Kacmarz (1895-1939) meurt en Varsovie au début de la guerre. Schauder est exécuté par la Gestapo en 1943, Włodzimierz Stożek (1883-1941) aussi. De plus, la Gestapo entreprend un massacre de professeurs de l'université de Lwów en 1941 où périssent Antoni Łomnicki (1881-1941) et Stanisław Ruziewicz (1889-1941). Seuls Feliks Barański (1905-2006), Stanisław Mazur (1905-1981) et Banach lui-même ont survécu à la guerre mais fatigué et malade Banach meurt en 1945. Le *Livre écossais* a survécu par le soin de Łucja Banach et a été imprimé en 1955 dans une modeste édition miméographée dans le laboratoire de Los Alamos où a travaillé Ulam (voir Mauldin [2015] pour une édition complète).

Ceux qui restaient parmi les professeurs de l'université de Lwów ont été chassés à la fin de la guerre. La plupart, dont Steinhaus, se sont installées à Wrocław, qui est redevenue polonaise en 1945 après avoir vécu plusieurs colonisations dans son histoire très mouvementée. Les mathématiciens du Wrocław créent en 1946 le *Nouveau livre écossais* dont une version est publiée en 1958 et, avec le Livre écossais, dans Mauldin [2015].

3. 5 La France

Par on ne sait pas quel miracle, l'école française des mathématiques a réussi de survivre aux deux guerres mondiales et à garder le même niveau de brillance intellectuelle pour laquelle on l'avait connue dans les siècles précédents. L'entrée dans le siècle est symbolisée par quelques grandes figures, dont Jordan et Poincaré, sans oublier Jacques Hadamard (1865-1963), élu dans le fauteuil de Poincaré à l'Académie, ou un autre académicien, Jacques Bussinesq (1842-1928), connu pour son travail en mathématique appliquée. Pour ce qui est de la période entre les deux guerres, il a souvent été dit qu'elle était entièrement marquée par l'analyse et seulement par quelques personnes, dont la plus ancienne était Emile Picard (1856-1941) et les plus jeunes Lebesgue, Borel et Baire. Néanmoins, une présentation succincte de cette période mathématique qui va à l'encontre de cette image des génies tout puissants, mais un peu isolés, se trouve dans Gispert and Leloup [2009]. Cette période est aussi marquée par les grandes découvertes en probabilité, pour commencer par Borel, mais surtout par Kolmogorov en Union Soviétique et Paul Lévy (1886-1971) en France. Un des problèmes de Hilbert était de trouver des fondements corrects pour les probabilités. Ce fut un résultat de Kolmogorov en 1930. Le groupe Bourbaki fut fondé en 1935, cf. §1. 9. Gustave Choquet (1915-2006) a continué la tradition ensembliste en France avec ses travaux en topologie générale, dans la théorie des mesures et en analyse fonctionnelle, en faisant un lien important avec l'école polonaise. C'était aussi le fondateur de la théorie du potentiel.[85]

Il y eu une pause en France pendant l'occupation allemande 1940-1944. Il y avait des victimes et victimes car juifs, dont Jacques Feldbau (1914-1945). Il a fait un travail important dans la topologie algébrique et a péri dans le camp d'extermination de Ganacker. Laurent Schwartz (1915-2002), le premier français à obtenir la médaille Fields, en 1950 pour un travail brillant qui porte sur la théorie des distributions, en dit : Schwartz [1997] « Durant la guerre, l'existence fut trop compliquée pour faire des mathématiques ». Sur cette période on peut consulter Audin [2009]. Depuis Schwartz, la médaille Fields (qui a malheureusement très peu récompensé le travail dont on a parlé dans d'autres sections de ce document) a été donnée à plusieurs Français (pour un total de 12 à ce jour), dont Groethendieck (cf. §3.), le refondateur avec Jean-Pierre Serre (né en 1926) de la géométrie algébrique, récompensé lui-même, et Alain Connes (né en 1947) récompensé pour son travail sur les algèbres de von Neumann. La source de beaucoup de ces travaux se trouve dans les travaux de Weil.

4. Ce qui nous reste à faire

Comment finir cet article où nous avons tant parlé sans rien dire sur un nombre de mathématiciens et de thèmes en mathématiques modernes : et le programme de Langlands, les mathématique appliquées, Joseph Keller (1923-2016) et son mentor Richard Courant (1888-1972) qui a continué la partie appliquée des mathématiques de Hilbert, comment ne pas parler de tant d'autres thèmes et découvertes ! Ils sont trop nombreux et nos connaissances et la limite de pages trop maigres. Comment parler si peu des Etats-Unis, d'Israël et de l'Union Soviétique ? Notre choix des thèmes s'est borné à ceux que nous comprenons assez bien et qui ne sont pas déjà très bien couverts par la littérature et même, cette limite n'a pas été entièrement franchie. Mais nous espérons avoir fait passer notre message principal. Nous avons essayé de démontrer que le siècle était spécial, différent et annonciateur de ce qui doit être évident aujourd'hui : les mathématiques et les mathématiciens sont à la frontière d'une société qui est numérisée,

85. S'il y a quelque chose à reprocher aux mathématiques françaises d'aujourd'hui, c'est que la tradition de Choquet n'est pas suffisamment soutenue, pas plus que celle de Claude Berge (1926-2002), qui a contribué énormément à la théorie de graphes et a trouvé la notion d'un graphe parfait.

pour le bonheur de tous dont les mathématiciens. Mais les avancées techniques ne prônent pas toujours une grande ouverture d'esprit. Le monde a besoin d'intellectuels engagés, plus que jamais. Faire et enseigner les mathématiques peuvent changer le monde et c'est une grande responsabilité. Finissons donc cet article en citant Schwartz [1997], qui était un intellectuel très engagé, au point qu'il soit difficile de nommer une cause juste pendant sa vie qui n'a pas vu son engagement. L'autobiographie de Schwartz s'intitule « Un mathématicien aux prises avec le siècle » Schwartz [1997]. Quels engagements à prendre dans notre propre siècle ?

Bibliographie

P. Alexandroff and H. Hopf. *Topologie*, volume 45 of *Die Grundlagen der mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer, 1936.

K. Appel and W. Haken. *Every planar map is four colorable*, volume 98 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. ISBN 0-8218-5103-9. URL `https://doi.org/10.1090/conm/098`. With the collaboration of J. Koch.

E. Artin. *Galois Theory*. Notre Dame Mathematical Lectures, no. 2. University of Notre Dame, Notre Dame, Ind., 1942. Edited and supplemented with a section on applications by Arthur N. Milgram.

J.-P. Arza and P. Bourgne, editors. *Ecrits et mémoires d'Evariste Galois : Edition critique intégrale de ses manuscripts et publicatons mathématiques*. Gauthiers-Villards, 2e éd. 1976 edition, 1962.

M. Audin. Publier sous l'occupation I. Autour de cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences. *Revue des histoires des mathématiques*, 15 : 7–57, 2009.

S. Awodey. Structure in mathematics and logic : a categorical perspective. *Philos. Math. (3)*, 4(3) :209–237, 1996. ISSN 0031-8019. URL `https://doi.org/10.1093/philmat/4.3.209`.

S. Banach. *Théorie des opérations linéaires*. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. ISBN 2-87647-148-5. Réédition de l'original de 1932.

J.-P. Belna. *Cantor*. Les Belles Lettres, Paris, 2000.

J.-P. Belna. *Histoire de la théorie des ensembles*. Ellipses, Paris, 2009.

H. Benis-Sinaceur. *Corps et Modèles*. Vrin, Paris, 1991, 2e éd. 1999.

H. Benis-Sinaceur. Le rôle de Poincaré dans la genèse de la métamathématique de Hilbert. In H. G. Greffe, J. l. and L. K., editors, *Henri Poincaré. Science et Philosophie*, pages 493–511. Akademie Verlag-Albert Blanchard, Berlin-Paris, 1996.

H. Benis-Sinaceur. Alfred Tarski : Semantic Shift, Heuristic Shift in Metamathematics. *Synthese*, 126(1) :49–65, Jan 2001. ISSN 1573-0964. doi : 10.1023/A :1005268531418. URL `https://doi.org/10.1023/A:1005268531418`.

H. Benis-Sinaceur. Tarski's Practice and Philosophy : Between Formalism and Pragmatism. In S. Lindström, E. Palmgren, K. Segerberg, and V. Stoltenberg-Hansen, editors, *Logicism, Intuitionism, and Formalism*. Springer, 2009. URL `https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01122267`. Collection : Synthese Library, 341.

H. Benis-Sinaceur. Facets and levels of mathematical abstraction. *Philosophia Scientiæ*, 18(1) :81–112, 2014.

H. Benis-Sinaceur. Dedekind's and Frege's views on Logic. *Mathematische Semesterberichte*, 64(2), 2017.

H. Benis-Sinaceur and J. Bourguignon. David Hilbert et les mathématiques du xx$^{\text{e}}$ siècle. *La Recherche*, 257, 1993.

E. Bishop. *Foundations of constructive analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1967.

B. Bolzano. *Die Paradoxien des Unendlichen*. Lepizig, trad.fr. Seuil, Paris 1993 edition, 1851.

J. Boniface. *Les constructions des nombres réels*. Ellipses, Paris, 2002.

J. Boniface. *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*. Vrin, Paris, 2003.

G. Boole. *An investigation of the laws of thought*. Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, Cambridge, 2009 reprint edition, 1854. ISBN 978-1-108-00153-3. URL `https://doi.org/10.1017/CBO9780511693090.024`. On which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, Reprint of the 1854 original, Previously published by Dover Publications, Inc., New York, 1957 [MR0085180] ; Prometheus Books, Amherst, NY, 2003 [MR1994936].

N. Bourbaki. *Éléments de Mathématique. Théorie des ensembles*. Hermann, Paris, 1939. ISBN 978-3-662-49360-1 ; 978-3-662-49361-8.

N. Bourbaki. *Éléments de Mathématique. Algébre*. Hermann, Paris, 1940a. ISBN 978-3-662-49360-1 ; 978-3-662-49361-8.

N. Bourbaki. *Éléments de Mathématique. Topologie générale*. Paris, hermann edition, 1940b. ISBN 978-3-662-49360-1 ; 978-3-662-49361-8.

N. Bourbaki. L'architecture des mathématiques. In F. L. Lionnais, editor, *Les grands courants de la pensée mathématique*, L'humanisme scientifique de demain, pages 35–47. Cahiers du Sud, Paris, (réed. Hermann 1997) edition, 1948.

J. Brewer and M. Smith. *Emmy Nœther : A Tribute to her Life and Work*. Marcel Dekker, New York, 1981.

L. E. J. Brouwer. Intuitionism and formalism. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 20 (2) :81–96, 1913. ISSN 0002-9904.

L. E. J. Brouwer. Directions of intuitionistic mathematics. *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, 50 :339 = Indagationes Math. 9, 197 (1947), 1947.

G. Cantor. Übe reine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1 :75–78, 1890-1.

G. Cantor. *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Springer, Berlin, reprint Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchandlung, 1966 edition, 1932.

G. H. Cantor. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 77 :258–262,

1874. ISSN 0075-4102. doi : 10.1515/crll.1874.77.258. URL http://dx.doi.org/10.1515/crll.1874.77.258.

J. Cavaillès. *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*. Hermann, Paris, reprint in Cavaillès, " Œuvres complètes de Philosophie des Sciences", Hermann, Paris, 1994 edition, 1938.

J. Cavaillès and E. Nœther. Briefwechel Cantor-Dedekind. Hermann, Trad. fr. in J. Cavaillès, "Philosophie Mathématique", Paris, Hermann, p. 179-251, 1962 ; reprint in Cavaillès, "Œuvres complètes de Philosophie des Sciences", Hermann, Paris, 1994 edition, 1937.

A. Cayley. On the theory of groups as depending on the symbolical equation $\theta^n = 1$. *Philosophical Magazine (4th ser.)*, 7 :40–47 et 408–409, 1854.

C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model Theory*. North Holland, Amsterdam, third edition, 1990.

C. Chevalley. Emil Artin (1842-1962). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 92 :1–10, 1964.

P. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 50(6) :1143–1148, 1963.

L. Corry. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhäuser, Basel, 2004.

A. Dahan-Dalmedico and J. Peiffer. *Routes et Dédales*. Études Vivantes, Paris, 1982.

J. Dauben. *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press, Princeton, 1979.

R. Dedekind. Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik. In *Dedekind [1932-35]*, pages 428–438. Trad. fr. in Dedekind [2008], p. 221-233 edition, 1854.

R. Dedekind. Bernhard Riemanns Lebenslauf. In H. Weber and R. Dedekind, editors, *B. Riemann. Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, pages 509–526. Teubner, Leipzig, 2e éd. 1892 edition, 1876.

R. Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen ?,*. Vieweg, Braunschweig, trad. fr. in Dedekind, R. [2008], p. 91-216 edition, 1888.

R. Dedekind. *Gesammelte mathematische Werke I, II, III*. Vieweg, Braunschweig, 1930-1932.

R. Dedekind. *La création des nombres*. Vrin, Paris, 2008.

R. Dedekind and H. Weber. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.*, 92 :181–290, 1882. ISSN 0075-4102.

P. Dehornoy. Cantor et les infinis. *Gaz. Math.*, (121) :29–46, 2009. ISSN 0224-8999.

A. Dick. *Emmy Noether, 1882–1935*. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. ISBN 3-7643-3019-8. Translated from the German by Heidi I. Blocher, With contributions by B. L. van der Waerden, Hermann Weyl and P. S. Alexandrov [P. S. Aleksandrov].

J. Dieudonné. L'œuvre mathématique de C. F. Gauss. Conférence au Palais de la Découverte, 2 juin 1961.

G. Dowek. *Les métamorphoses du calcul*. Le Pommier, Paris, 2011.

P. Dugac. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1976. Avec de nombreux textes inédits, Préface de Jean Dieudonné, Collection des Travaux de l'Académie internationale d'Histoire des Sciences No. 24, L'Histoire des Sciences, Textes et Études.

W. Dyck. Gruppentheoretische Studien. *Math. Ann.*, 20(1) :1–44, 1882. ISSN 0025-5831. URL `https://doi.org/10.1007/BF01443322`.

H. Edwards. The genesis of ideal theory. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 23(4) : 321–378, 1980/81. ISSN 0003-9519.

H. Edwards. *Galois Theory*. Springer-Verlag, 1984.

H. Edwards. An appreciation of Kronecker. *Math. Intelligencer*, 9(1) :28–35, 1987. ISSN 0343-6993.

H. Edwards. Kronecker's place in history. In *History and philosophy of modern mathematics (Minneapolis, MN, 1985)*, Minnesota Stud. Philos. Sci., XI, pages 139–144. Univ. Minnesota Press, Minneapolis, MN, 1988.

H. Edwards. Kronecker's views on the foundations of mathematics. In *The history of modern mathematics, Vol. I (Poughkeepsie, NY, 1989)*, pages 67–77. Academic Press, Boston, MA, 1989.

H. Edwards. Kronecker's arithmetical theory of algebraic quantities. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 94 :130–139, 1992.

H. Edwards. Kronecker on the foundations of mathematics. In J. Hintikka, editor, *From Dedekind to Gödel (Boston, MA, 1992)*, volume 251 of *Synthese Lib.*, pages 45–52. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

H. Edwards, O. Neumann, and W. Purkert. Dedekinds "Bunte Bemerkungen" zu Kroneckers "Grundzuege". *Arch. Hist. Ex. Sci*, 27(49-85), 1982.

C. Ehrhardt. *Évariste Galois. La fabrication d'une icône mathématique*. EHESS, Paris, 2011.

A. B. Feferman and S. Feferman. *Alfred Tarski : life and logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. ISBN 978-0-521-71401-3. Reprint of the 2004 original [MR2095748].

S. Feferman. *In the light of Logic*, chapter Weyl vindicated : *Das Kontinuum* seventy years later, pages 249–283. Oxford University Press, Oxford, 1998.

S. Feferman. Predicativity. In *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, pages 590–624. Oxford University Press, 2005.

J. Ferreirós. *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2007. ISBN 978-3-7643-8349-7.

A. Fraenkel. über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen. *J. Reine Angew. Math.*, 145 :139–176, 1915. ISSN 0075-4102.

G. Frege. *Grundgesetze der Arithmetik. Band I, II*. Mentis Verlag GmbH, Paderborn, 2009 reprint edition, 1903. ISBN 978-3-89785-692-9. Begriffsschriftlich abgeleitet. [Derived in conceptual notation], Transcribed into modern formula notation and with a detailed subject index provided by Thomas Müller, Bernhard Schröder and Rainer Stuhlmann-Laeisz.

E. Galois. Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. In J.-P. Arza and P. Bourgne, editors, *Ecrits et mémoires d'Evariste Galois : Edition critique intégrale de ses manuscripts et publicatons mathématiques*. Gauthier-Villars, Paris, 2e éd. 1976 edition, 1962.

S. Gandon and I. Smadja, editors. *Philosophie des mathématiques*. Vrin, Paris, 2017.

C. F. Gauss. *Disquisitiones Arithmeticæ*. Gerhard Fleischer, Leipzig, 1801.

G. Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 112(1) :493–565, 1936. ISSN 0025-5831. doi : 10.1007/BF01565428. URL https://doi.org/10.1007/BF01565428.

H. Gispert and J. Leloup. Des patrons de mathématiques en france dans l'entre deux-guerres. *Revue d'histoire des sciences*, 62(1) :39–117, 2009.

S. R. Givant and R. N. McKenzie, editors. *The collected papers of Alfred Tarski, 4 vol.* Birkhäuser, 1986.

K. Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatsh. Math. Phys.*, 37(1) :349–360, 1930. ISSN 0026-9255. doi : 10.1007/BF01696781. URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01696781.

K. Gödel. Über formal unentscheidbare Säztze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 :173–198, 1931.

K. Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 24 :556–557, 1938.

H. Grassmann. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*. Enslin, Berlin, 1862.

E. Haffner. Strategical use(s) of arithmetic in Richard Dedekind and Heinrich Weber's *theorie der algebraischen funktionen einer veränderlichen*. *Historia Math.*, 44(1) :31–69, 2017. ISSN 0315-0860.

H. Hasse. Die moderne algebraische Methode. *Jahresbericht der DMV*, 39 : 22–34, 1930.

G. Heinzmann. *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les Fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1986.

D. Hilbert. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4(1) :175–546, 1897.

D. Hilbert. *Die Grundelagen der Geometrie*. Leipzig, Trad. fr. Paris Dunot, 1971 edition, 1899.

D. Hilbert. Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1(1) :157–177, 1922. ISSN 0025-5858.

D. Hilbert. Die logischen Grundlagen der Mathematik. *Math. Ann.*, 88 (1-2) :151–165, 1923. ISSN 0025-5831.

D. Hilbert. *Gesammelte Abhandlungen I, II, III*. Springer, Berlin, 1932-1935.

D. Hilbert. *The theory of algebraic number fields*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. ISBN 3-540-62779-0. Translated from the German and with a preface by Iain T. Adamson, With an introduction by Franz Lemmermeyer and Norbert Schappacher.

C. Jordan. *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1870.

F. Klein. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Verlag von Andreas Deichert, Erlangen, traduction fr. Gauthier Villars, Paris 1974 edition, 1872.

L. Kronecker. Über die algebraisch auflösbaren gleichungen. *Monatsberichte der Königlichen Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin*, pages 365–374, 1853.

L. Kronecker. Note sur les fonctions semblables des racines des équations. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 19(1) :79–80, 1854.

L. Kronecker. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie des algebraischen Grössen*. G. Reimer, Berlin, 1882.

L. Kronecker. *Werke I-V*. Teubner, Leipzig, 1895-1930.

E. Landau. Nachrichten König. Gesel. Wissen. *Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen*, pages 50–70, 1917.

J. Largeault. *Intuitionisme et théorie de la démonstration*. Vrin, Paris, 1992.

D. Laugwitz. *Bernhard Riemann, 1826-1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*. Birkhäuser, Boston, 1999.

F. Le Lionnais. *Les grands courants de la pensée mathématique*. Collection Histoire de la Pensée. [History of Thought Collection]. Hermann, Paris, rééd. 1997 edition, 1998. ISBN 2-7056-6332-0. With a preface by Bernard Teissier, a foreword by Jean Ballard, and an unpublished letter of Paul Valéry.

H. Lebesgue. *Notice sur les travaux de M. Henri Lebesgue*. Imprimerie et Librairie Édouard Privat, Toulouse, 1922.

J. P. G. Lejeune-Dirichlet. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1863.

J. P. G. Lejeune-Dirichlet. *Werke I*. G. Reimer, Berlin, 1889.

J. P. G. Lejeune-Dirichlet. *Werke II*. G. Reimer, Berlin, 1897.

A. Lévy and R. M. Solovay. Measurable cardinals and the continuum hypothesis. *Israel J. Math*, 5 :234–248, 1967.

J. Liouville. Œuvres mathématiques d'Évariste Galois. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, X1 :381–445, 1846.

H. Lombardi. Le programme de Hilbert et les mathématiques constructives, 2002. URL `hlombardi.free.fr/publis/articleProgHilb.pdf`.

L. Lovász. *Large networks and graph limits*, volume 60 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

D. Maharam. On homogeneous measure algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 28 :108–111, 1942. ISSN 0027-8424. doi : 10.1073/pnas.28.3.108. URL `https://doi.org/10.1073/pnas.28.3.108`.

D. R. Mauldin. *The Scottish Book : Mathematics from The Scottish Café, with Selected Problems from The New Scottish Book*. Springer, 2nd edition, 2015.

C. McLarty. Emmy Noether's 'set theoretic' topology : from Dedekind to the rise of functors. In J. Gray and J. Ferreirós, editors, *The architecture of modern mathematics*, pages 187–208. Oxford Univ. Press, Oxford, 2006.

C. McLarty. What structuralism achieves. In P. Mancosu, editor, *The Philosophy of mathematical practice*, pages 354–369. Oxford University Press, Oxford, 2008a.

C. McLarty. There is no ontology here : visual and structural geometry in arithmetic. In P. Mancosu, editor, *The Philosophy of mathematical practice*, pages 370–406. Oxford University Press, 2008b.

H. Meschkowski. *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1967.

H. Minkowski. Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 14 :149–163, 1905.

G. Peano. *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*. Torino, 1888.

H. Poincaré. *Notice sur les travaux scientifiques de Henri Poincaré*. Gauthier-Villars, Paris, 1886.

H. Poincaré. Les fondements de la géométrie. *Journal des savants*, pages 252–271, mai 1902.

H. Poincaré. L'avenir des mathématiques. In *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, Rome*, pages 167–182. Academia dei Lincei, 1908.

H. Poincaré. Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. In *Œuvres IX*, pages 28–113. Gauthier-Villars, Paris, 1916-1956.

H. Poincaré. *La science et l'hypothèse*. Flammarion, Paris, rééd edition, 1968.

B. Riemann. Über die Hypothesen, welche zugrunde der Geometrie liegen. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13 :133–152, 1868.

B. Riemann. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. In H. Weber and R. Dedekind, editors, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, pages 3–47. Teubner, Leipzig, 1876 ; 2e éd. 1892.

F. Rivenc and P. de Rouilhan, editors. *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*. Payot, Paris, 1992.

P. Roquette. Heinrich Weber, David Hilbert and Königsberg, 1992. URL https://www.mathi.uni-heidelberg.de/ roquette/weber.pdf. Hilbert Seminar, State University of Kaliningrad, Svedlogorsk, June 1, 1992.

B. Russell. A letter to Frege, June 1902.

F. Russo. Groupes et géométrie. la genèse du programme d'Erlangen de Félix Klein ». Conférence au Palais de la Découverte, 4 mai 1968.

G. E. Sacks. *Saturated model theory*. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1972. Mathematics Lecture Note Series.

W. Scharlau. *Richard Dedekind 1831-1981*. Vieweg und Sohn, Braunschweig-Wiesbaden, 1981.

L. Schwartz. *Un math'ematicien aux prises avec le siècle*. Odile Jacob, Paris, 1997.

A. Selberg. An elementary proof of the prime-number theorem. *Ann. of Math. (2)*, 50 :305–313, 1949. ISSN 0003-486X. URL https://doi.org/10.2307/1969455.

J. Serret. *Cours d'Algèbre Supérieure*. Bachelier, Paris, 1849.

S. Shelah. *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, volume 92 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, xxxiv+705 pp, 1990.

S. Shelah. *Cardinal Arithmetic*, volume 29 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.

S. Shelah. *Proper and improper forcing*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

E. Steinitz. Algebraische Theorie der Körper. *J. Reine Angew. Math.*, 137 : 167–309, 1910. ISSN 0075-4102.

M. Talagrand. Maharam's problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(7) : 501–503, 2006. ISSN 1631-073X. doi : 10.1016/j.crma.2006.01.026. URL https://doi.org/10.1016/j.crma.2006.01.026.

A. M. Turing. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 42(3) :230–265, 1936. ISSN 0024-6115. doi : 10.1112/plms/s2-42.1.230. URL https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230.

B. L. van der Waerden. *Moderne Algebra, Band I, II*. Springer-Verlag, Berlin, 1930-1931.

B. L. van der Waerden. Nachruf auf Emmy Noether. *Math. Ann.*, 111(1) : 469–476, 1935. ISSN 0025-5831.

B. L. van der Waerden. Die Algebra seit Galois. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigun*, 68 :155–165, 1955.

B. L. van der Waerden. Die Galois-Theorie von Heinrich Weber bis Emil Artin. *Arch. History Exact Sci.*, 9(3) :240–248, 1972.

B. L. van der Waerden. On the sources of my book *moderne algebra*. *Historia Math.*, 2 :31–40, 1975. ISSN 0315-0860.

J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, Berlin, 1932.

J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

P. W. Ein Manuskript Dedekinds über Galois-Theorie. *NTM-Schriftenr. Geschichte Naturw. Tecnick Med*, 13(2) :1–16, 1977.

H. Weber. Leopold Kronecker. *Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung*, 2 :5–31, 1891-1892.

H. Weber. Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. *Math. Ann.*, 43(4) :521–549, 1893. ISSN 0025-5831.

H. Weber. *Lehrbuch der Algebra I und II*. Vieweg, Braunschweig, trad. fr. Gauthier-Villars, Paris 1898. edition, 1895-1896.

H. Weyl. *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen ûbier die Grundlagen der Analysis.* Veit, Leipzig, 1918a.

H. Weyl. *Raum, Zeit, Materie - Vorlesungen über Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer, Trad.fr. Blanchard, Paris, 1922, réimp. 1958, 1979. edition, 1918b.

H. Weyl. Emmy Nœther. *Scripta Mathematica*, 3 :201–220, 1935.

A. N. Whitehead and B. Russell. *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1990.

H. Wussing. *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes ; Ein Beitrag zur Entstehungsgeschichte der abstrakten Grupppentheorie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

F. Zalamea. Grandes corrientes de la matem'atica en el siglo XX. I La matem'atica de los fundamentos 1900-1930. *Bol. Mat.*, 16(2) :95–114, 2009.

F. Zalamea. Major currents of mathematics in the twentieth century. III. The mathematics of structure 1940–1970. *Bol. Mat.*, 18(2) :109–122, 2011a. ISSN 0120-0380.

F. Zalamea. Major currents of mathematics in the twentieth century. III. The mathematics of structure 1940–1970. *Bol. Mat.*, 18(2) :109–122, 2011b. ISSN 0120-0380.

F. Zalamea. Major currents of mathematics in the twentieth century. IV. The mathematics of transfers 1960–1990. *Bol. Mat.*, 19(1) :19–36, 2012a. ISSN 0120-0380.

F. Zalamea. Major currents of mathematics in the twentieth century. V. Panorama of the Fields Medals (1936–2010). *Bol. Mat.*, 19(2) :119–132, 2012b. ISSN 0120-0380.

F. Zalamea. Major currents of mathematics in the twentieth century. VI. Panorama of the Abel Prizes (2003–2013). *Bol. Mat.*, 20(1) :63–74, 2013. ISSN 0120-0380.